



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA**  
**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS**

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**TRABAJO DE TESIS DOCTORAL:**

**Termalización Holográfica de operadores cargados**

Tesis de doctorado presentada por Alejandro Giordano para optar por el título de Doctor  
en Física por la Universidad Nacional de La Plata

Director: Dr. Guillermo A. Silva  
Co-director: Dr. Nicolás E. Grandi

Año: 2018

## Agradecimientos

En primera instancia quiero agradecer a la educación pública que me formó totalmente, desde el colegio primario Escuela N°37 Bernardino Rivadavia de Monte grande, la Escuela Secundaria N°12 Gobernador Mariano Saavedra de Monte Grande, la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Lomas de Zamora y al departamento de Física de la UNLP.

Quiero agradecer Alán Garbarz, Osvaldo Santillán y Pablo Pisani por haber aceptado ser los jurados de esta tesis. En especial a Pablo por las preguntas y discusiones de la última semana previa a la defensa ya que me hizo sentir que todo el esfuerzo que le puse a los trabajos que presento en esta tesis tuvieron sentido.

A Nicolás Grandi y Guillermo Silva por su incansable paciencia y siempre estar predispuestos a la discusión, que sin ellos sin ninguna duda no me hubiera doctorado y que allá por el 2012 me convencieron de que no abandone el doctorado, el cuál hubiera sido un gran error, ya que me estaría perdiendo de la gran satisfacción que siento en estos momentos.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por haber financiado las actividades de investigación y al Departamento de Física de la UNLP por haberme dado el lugar de trabajo que dieron lugar a esta tesis.

A Pablo Rodriguez Ponte que me ayudo de forma clave en los algoritmos de cálculos en los cuales me base en la resolución de varios problemas a lo largo de esta tesis. Siguiendo en línea con esto, a Damian Galante y Martin Schvellinger que también contribuyeron de forma importante en la resolución. A mi hermano por contribuir en el segundo trabajo de esta tesis, y por las infinitas discusiones de física que me ayudaron a finalizar esta tesis.

A Memo por generar las condiciones en este último año y medio para que yo pueda terminar de escribir la tesis, sin él, no lo podría haber hecho.

A mis viejos y hermana por aguantar que en estos años los visite poco y que siempre estuvieron como soporte. A Beatriz y Ruy porque siempre están y colaboran siempre para ayudarme en todo y de forma incondicional. A mi padrino, Mirta, Noe y Anita, que como siempre dicen: acá estamos.

A mis amigos de la plata, Quique, Arturo, Mateo, Leo, Nacho, Gerardo, Marce, y Demián por compartir incanzables charlas y debates de cuales aprendi mucho de la vida.

Esta tesis está íntegramente dedicada a vos Ro, que haces cada día que valga la pena, que viviste y sufriste conmigo estos ultimos años escribiendo la tesis.

Y por último, mi doctorado y básicamente mi estudio en la UNLP no podría haber sido posible sin las políticas llevadas a cabo por los gobiernos de Néstor y Cristina, a ellos mi más profundo agradecimiento.

# Resumen

El descubrimiento de la dualidad AdS/CFT ha sido probablemente hasta el momento, la consecuencia más importante de la teoría de cuerdas. A dicha dualidad se la ha testado mayoritariamente en sistemas en equilibrio, dando resultados positivos en favor de su validez.

En esta tesis estudiamos la termalización de sistemas físicos en distintas dimensiones espacio-temporales fuertemente acoplados fuera del equilibrio por medio de la dualidad AdS/CFT. Tales sistemas, son modelados mediante espacios-tiempos curvos que dependen explícitamente de la coordenada temporal. Dichos espacio-tiempos representan el colapso de una capa de materia sin masa en un espacio-tiempo AdS-Reissner-Nordstrom con dinámica de Einstein o de Einstein-Gauss-Bonnet. Estudiamos si la correspondiente métrica de Vaidya es soportada por materia que satisface las condiciones de energía nula. Encontramos que, si el valor absoluto de la carga del fondo decrece durante el colapso, las condiciones de energía se cumplen en todas partes del espacio-tiempo. Por otro lado, si el valor absoluto de la carga del fondo aumenta, la métrica no satisface las condiciones de energía en la región IR. Por lo tanto, desde la perspectiva gauge/gravedad, este último caso solo es útil para estudiar la termalización de los grados de libertad UV. Para estas geometrías, probamos el proceso de termalización con funciones de correlación de dos puntos de operadores cargados, encontrando en [1, 2] que el tiempo de termalización crece con la carga del operador, así como con la dimensión del espacio y disminuye a medida que aumenta el parámetro de Gauss-Bonnet.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Interacción fuerte y QCD	8
1.1.1. Repaso de QCD	8
1.2. Experimentos de iones pesados	10
1.3. Inesperada conexión entre la teoría de cuerdas y las colisiones en el RHIC	10
<b>2. Partículas y Gravedad</b>	<b>13</b>
2.1. Partícula	13
2.1.1. Interacción de una partícula con un campo electromagnético	14
2.1.2. La acción del campo electromagnético	15
2.2. Gravedad	15
2.2.1. Geodésicas	15
2.2.2. Acción de Einstein-Hilbert	16
2.2.3. Acción de Einstein-Hilbert-Maxwell	17
2.2.4. Acción de Einstein-Hilbert-Maxwell-Gauss-Bonnet	17
2.3. Teoría de Kaluza-Klein	18
2.3.1. Movimiento de partículas cargadas en 4 dimensiones a partir de geodésicas en 5 dimensiones	19
<b>3. Dualidad Gauge/Gravedad</b>	<b>21</b>
3.1. Motivando la dualidad	21
3.2. Algunos resultados importantes	26
3.3. Generalización de la conjetura de Maldacena	26
3.4. Regímenes de validez	29
3.5. Teoría de campos con potencial químico finito	30
3.6. Lazos de Wilson	31
<b>4. Campo escalar y Herramientas de cálculo</b>	<b>33</b>
4.1. La dualidad campos/operador para un campo escalar	33
4.1.1. Función de un punto en presencia de fuentes externas	33
4.1.2. Función de dos puntos para el campo escalar en $AdS_{d+1}$	35
4.1.3. Propagador en la aproximación geodésica	38
4.2. Cálculo del propagador en procesos dependientes del tiempo	40
4.2.1. Formalismo de línea de mundo y aproximación geodésica	41
4.2.2. Aproximación WKB	42
4.3. Diccionario	44
<b>5. Fondos</b>	<b>45</b>
5.1. La Métrica de Schwarzschild	45
5.1.1. Estructura Causal	46
5.1.2. Singularidades	47
5.1.3. Coordenadas de Eddington-Finkelstein (E-F)	48
5.1.4. Coordenadas de E-F entrantes	48

5.1.5.	Coordenadas de E-F salientes . . . . .	49
5.2.	La métrica Schwarzschild-Vaidya . . . . .	50
5.3.	La métrica AdS-Vaidya . . . . .	51
5.4.	La métrica de Vaidya generalizada a un agujero negro AdS- Reissner-Nordström . . . . .	52
5.4.1.	Estado de equilibrio . . . . .	52
5.4.2.	Estados dependientes del tiempo en el fondo de AdS-Reissner-Nordström . . . . .	55
5.5.	Correcciones de Gauss-Bonnet . . . . .	57
5.5.1.	La métrica AdS-Vaidya en una gravedad de Gauss-Bonnet . . . . .	58
5.5.2.	La métrica AdS-Vaidya cargada en una gravedad de Gauss-Bonnet . . . . .	58
<b>6.</b>	<b>Función de dos puntos</b>	<b>61</b>
6.1.	Accediendo a la región clásicamente prohibida . . . . .	63
6.1.1.	Caso en que $e = 0$ . . . . .	64
6.1.2.	Caso en que $e \neq 0$ . . . . .	65
6.1.3.	Justificación por medio de la reducción de Kaluza-Klein . . . . .	67
6.2.	Estudio de la función de dos puntos en diferentes situaciones . . . . .	68
<b>7.</b>	<b>Resultados</b>	<b>73</b>
7.1.	Termalización de las funciones de dos puntos de un sistema en un baño termico con $\Delta t = 0$ y $\Delta t \neq 0$ . . . . .	74
7.1.1.	Termalización de las funciones de dos puntos de un sistema en un baño térmico con $\Delta t = 0$ . . . . .	75
7.1.2.	Termalización de las funciones de dos puntos de un sistema en un baño térmico y $\Delta t \neq 0$ . . . . .	76
7.2.	Función de dos puntos en un fondo AdS-Reissner-Nordström . . . . .	77
7.2.1.	AdS-RN $q_E = 0$ , $\Delta t = 0$ Cargando y descargando . . . . .	78
7.2.2.	AdS-RN $q_E = 0$ , $\Delta t \neq 0$ Cargandose . . . . .	80
7.2.3.	Fondo AdS-RN a carga constante, con $q_E \neq 0$ y $\Delta t \neq 0$ . . . . .	83
7.2.4.	Fondo AdS-RN descargandose, con $q_E \neq 0$ y $\Delta t \neq 0$ . . . . .	85
7.2.5.	Fondo AdS-RN cargandose, con $q_E \neq 0$ y $\Delta t \neq 0$ . . . . .	87
7.3.	Estudio de la función de dos puntos en un fondo de AdS-GB-BH . . . . .	89
7.3.1.	AdS-GB $\Delta t = 0$ $Q = 0$ . . . . .	90
7.3.2.	AdS-GB-RN con $\Delta t = 0$ $Q \neq 0$ . . . . .	91
7.3.3.	AdS-GB-RN $\Delta t \neq 0$ $Q \neq 0$ $q_E = 0$ . . . . .	92
7.3.4.	Estudio de la función de dos puntos a tiempos diferentes de un operador escalar cargado AdS-GB-RN . . . . .	93
7.3.5.	Carga constante . . . . .	95
<b>8.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>101</b>
<b>9.</b>	<b>Apéndice</b>	<b>103</b>
9.1.	Ecuaciones de movimiento . . . . .	103
9.1.1.	Principio de mínima acción . . . . .	103
9.1.2.	Ecuaciones de Hamilton . . . . .	105
9.1.3.	Función de Routh . . . . .	106
9.1.4.	La acción como función de las coordenadas . . . . .	106
9.1.5.	Principio de mínima acción para una variación completa de la acción . . . . .	107
9.1.6.	Transformaciones canónicas . . . . .	110
9.1.7.	Ecuación de Hamilton-Jacobi . . . . .	111
9.2.	Lazos de Wilson Rectangulares . . . . .	112
9.3.	Resultados de los lazos de Wilson . . . . .	114
9.3.1.	Termalización de lazos de Wilson rectangulares AdS-BH . . . . .	114
9.3.2.	Termalización de lazos de Wilson rectangulares AdS-RN . . . . .	114
9.3.3.	Termalización de lazos de Wilson rectangulares AdS-GB-BH . . . . .	115
9.3.4.	Termalización de lazos de Wilson rectangulares AdS-GB-RN . . . . .	115

# Capítulo 1

## Introducción

El estudio de los procesos fuera del equilibrio en teoría cuántica de campos es una importante y activa área de investigación (ver [3] para referencias). El tema tiene las más diversas aplicaciones que van desde la astrofísica y la cosmología, por ejemplo, el estudio de la producción de partículas al final de la inflación y la generación de fluctuaciones de densidad en el universo temprano, a las colisiones de iones pesados relativistas, es decir, la dinámica del plasma de quark gluones en el RHIC y LHC. Para el caso de estados cercanos al equilibrio, existen formalismos bien desarrollados: respuesta lineal, teoría cinética o dinámica de fluidos. Estas técnicas se basan en la existencia de un *ensemble* de equilibrio. Sin embargo, en muchas instancias físicas, el sistema a estudiar puede estar fuertemente acoplado o en un estado denso o lejos del equilibrio, y por lo tanto en estas situaciones las técnicas estándar no se pueden aplicar.

La cuestión de si un subconjunto dado de los grados de libertad de un cierto sistema alcanza el equilibrio a partir de un estado inicial arbitrario, y si dicho equilibrio puede ser descrito por una matriz de densidad térmica, es un tema abierto cuya respuesta parece depender de los detalles de la dinámica subyacente [4]. Existe una gran cantidad de investigaciones numéricas y analíticas sobre dichos procesos de *quenching* (ver [5] y las referencias de ellos), tanto en sistemas débilmente acoplados en el régimen perturbativo [6], como en sistemas integrables [7]. Por otra parte, las teorías cuánticas de campos en acoplamiento fuerte, se han estudiado principalmente mediante métodos numéricos [8].

En esta tesis consideraremos el estudio de sistemas fuertemente acoplados lejos del equilibrio, utilizando la correspondencia gauge/gravedad [9, 10, 11, 12]. Como es bien conocido, la correspondencia holográfica es el marco natural para el análisis de problemas en teorías cuánticas de campos que están fuertemente acopladas, ya que nos permite abordar los cálculos típicos de las teorías de campos mediante cálculos clásicos de gravedad. Para estados que están cerca del equilibrio, la correspondencia ha sido ampliamente estudiada con un énfasis particular en la respuesta lineal y en el régimen hidrodinámico, en términos de perturbaciones de la geometría del agujero negro (ver el reciente revisiones [13, 14]). Más recientemente, se ha prestado atención a estados alejados del equilibrio. La referencia [9] hizo una propuesta holográfica para modelar la inyección repentina de energía en el estado de vacío de la QFT, y su posterior termalización, en términos de una geometría de la forma AdS-Vaidya. El espacio-tiempo de Vaidya dinámico, corresponde físicamente al colapso de una capa de materia homogénea en AdS, que conduce a la formación de un agujero negro [15]. Esa geometría interpola entre el espacio-tiempo de AdS puro (vacío) en el pasado distante y un agujero negro AdS (estado térmico) en el futuro lejano. Las funciones de correlación de dos puntos de operadores  $\hat{\mathcal{O}}$  de dimensiones conformes grandes, se pueden calcular en la descripción dual, en la aproximación semiclásica en términos de geodésicas. Operadores no locales como lazos de Wilson y entropía de entrelazamiento en la perspectiva de gravedad han sido estudiados para el análisis de la termalización en términos de (hiper)superficies mínimas. La imagen resultante es que los grados de libertad UV termalizan primero, seguidos más tarde por los IR (termalización *bottom-up* [9]). Desde la perspectiva de la gravedad, esto es un resultado esperado ya que las pruebas del IR exploran profundamente la dirección radial, siendo sensible a la posición de la capa durante tiempos más largos.

Los resultados que mencionamos se generalizaron en [10, 11, 12, 16] a situaciones con un potencial químico no trivial o, en la doble perspectiva, al caso en que el sistema experimenta una inyección repentina de energía y partículas. La geometría dual fue elegida para que la capa de materia sin masa cargada que

colapsa a un agujero negro, interpole entre un AdS en el pasado distante y un agujero negro cargado AdS Reissner-Nordstrom (AdS-RN) en el futuro lejano. La termalización fue estudiada mediante por funciones de dos puntos de operadores escalares sin carga, lazos de Wilson y entropía de entrelazamiento. La imagen emergente de [12] fue que el sistema tarda más tiempo en termalizar a medida que aumenta el potencial químico final, (ver [17]-[40] para trabajos relacionados).

Nuestro objetivo en la presente tesis es ampliar los estudios mencionados anteriormente. En particular, dado que se sabe que la geometría de Vaidya está soportada por un tensor energía-momento que satisface las condiciones de energía nula, en la presente tesis analizamos las condiciones de energía de las geometrías de Vaidya y Gauss-Bonnet cargadas, previamente analizadas en [12, 16], y sus posteriores generalizaciones. Además estudiamos el proceso de termalización probando al sistema con operadores escalares cargados.

La organización de esta tesis es la siguiente: en lo que resta de este capítulo repasaremos la interacción fuerte y sus fases. En el capítulo 2 repasaremos los conceptos básicos de partículas y gravedad clásica. En el capítulo 3 presentamos la correspondencia AdS/CFT desde una perspectiva bastante general apelando a que una teoría de campos en  $d$  dimensiones es equivalente a una teoría de gravedad en  $d + 1$  dimensiones. En el capítulo 4 primero estudiamos el cálculo convencional de la función de dos puntos asociado a un campo escalar. Luego, estudiamos el formalismo de línea de mundo y la aproximación WKB, para obtener las funciones de dos puntos de operadores escalares en el límite de masa grande. En el capítulo 5 estudiamos con detalle los fondos necesarios para su posterior estudio en los procesos de termalización. En el capítulo 6 mencionaremos como se puede utilizar la correspondencia AdS/CFT, para que resolviendo geodésicas en regiones clásicamente prohibidas, nos permita calcular funciones de dos puntos de operadores escalares. Y en el capítulo 7 presentamos los resultados. Finalmente, en el capítulo 8 presentaremos las conclusiones.

## 1.1. Interacción fuerte y QCD

### 1.1.1. Repaso de QCD

Los protones y neutrones están constituidos por partículas más fundamentales, los quarks. Bajo circunstancias normales, los quarks están unidos dentro de protones y neutrones, y no podemos liberarlos. La interacción fuerte es la fuerza que mantiene unidos a los quarks dentro de los hadrones. La teoría de la interacción fuerte se describe mediante una teoría de gauge llamada la cromodinámica cuántica o QCD, que a diferencia de QED se basa en la simetría de gauge  $SU(3)$ . La interacción fuerte es mediada por gluones, que son los campos de gauge asociados a  $SU(3)$ .

Un quark pertenece a la representación fundamental de  $SU(3)$  y presenta 3 estados posibles. Estos grados de libertad son llamados de color. Si denotamos los grados de libertad de color por el índice  $i$ , un quark se puede escribir como  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Un antiquark  $\bar{q}_i$  tiene un anticolor. Para la interacción electromagnética, una carga eléctrica es fuente de la interacción; del mismo modo, para la interacción fuerte, una carga de color es fuente de la interacción fuerte.

Un gluón, que es el transportador de fuerza fuerte tiene carga de color, por lo tanto tiene autointeracciones. Este punto es muy diferente de QED; el transportador de la fuerza electromagnética, el fotón, es eléctricamente neutro. Este aspecto cambia la dinámica de QCD en comparación a la de QED drásticamente.

Dado que el color del quark típicamente cambia por una interacción quark-gluon, la diferencia de color es llevada por el gluón. Por lo tanto, el gluón lleva un color y un anticolor y en consecuencia se comporta como un par quark-antiquark  $q_i - \bar{q}_j$ . Un gluón pertenece a la representación adjunta de  $SU(3)$ .

La interacción de QCD se vuelve débil a alta energía (libertad asintótica), y podemos hacer cálculos con QCD perturbativa. Esto fue fundamental para confirmar QCD como el teoría de la interacción fuerte ya que las predicciones de la QCD perturbativa pueden ser comparadas con los resultados de los experimentos de dispersión inelástica profunda. Por otro lado, la interacción de QCD se vuelve más fuerte a baja energía. Esta propiedad conduce a que los quarks y gluones están confinados en partículas conocidas colectivamente como hadrones, y sólo encontramos en la naturaleza partículas "de color neutro". A este efecto se conoce como el confinamiento de color, pero esto no ha sido probado aún a partir de primeros principios.

Estas características de QCD hacen que se puedan distinguir dos fases: una hadrónica de quarks y gluones confinados, con simetría quiral rota, y otra fase deconfinada y con simetría quiral restaurada, a la que se denomina genéricamente plasma de quarks y gluones (QGP) (Fig. 1.1). Bajo condiciones extremas de temperatura y/o densidad puede producirse una transición de la fase confinada a la deconfinada. Ejemplos



de QGP podrían encontrarse en la materia que conforma el interior de objetos compactos como las estrellas de neutrones ([41], [42]), o durante los primeros instantes de la expansión del Universo. La región de baja temperatura y bajo potencial químico  $\chi SB$  en esta figura es la fase donde los quarks están confinados. Además de las mencionadas, otras fases pueden estar presentes en el diagrama de QCD. Por ejemplo, la

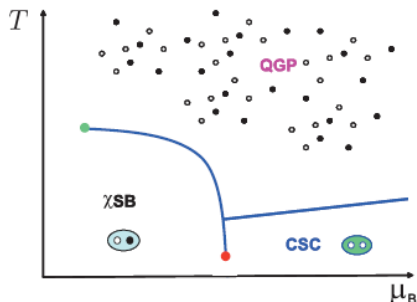


Figura 1.1:

materia de quarks puede agruparse formando pares, dando lugar a una fase de superconductividad de color CSC ([43], [44], [45]).

Al igual que el plasma electromagnético habitual, el QGP está constituido por partículas cargadas ionizadas. Las diferencias entre QED y QCD radican en el significado de carga e ionización. Para QGP, nos referimos a las cargas de color (no a las eléctricas). Los quarks también llevan cargas eléctricas, pero aquí ese aspecto no es importante. Además, lo que queremos decir por ionización, es la deconfinación de los quarks. La transición al QGP se estima que sucede a temperaturas del orden de  $T_c \approx 230 MeV \rightarrow 2.7 \times 10^{12} K$ .

Ingenuamente, uno podría esperar que la teoría de perturbaciones sea válida en la fase del plasma ya que el deconfinamiento ocurre allí. Asimismo el plasma debería comportarse como un gas sin interacciones a temperaturas suficientemente altas. Sin embargo la interacción fuerte no se vuelve lo suficientemente débil a las temperaturas que resultan al realizar los experimentos actuales. Esto se debe a que la constante de acoplamiento QCD disminuye solo logarítmicamente con la energía,  $1/\log E$ . De hecho, los resultados experimentales muestran que la QCD todavía está fuertemente acoplada en la fase de plasma (Sección 1.3). De manera que si quisieramos discutir las propiedades teóricas del plasma, no podemos emplear técnicas de la QCD perturbativa. Necesitamos otro enfoque para estudiar el QGP.

## Teoría de gauge en el límite de $N$ grande

En QCD, la teoría de perturbaciones tiene una potencia limitada, y todavía es muy difícil de resolver QCD de forma no perturbativa. Un método de aproximación, la denominada teoría de gauge en el límite de  $N$  grande, fue propuesta por 't Hooft, y está naturalmente relacionada con la teoría de cuerdas.

Hay tres colores en QCD, pero en la teoría de gauge en el límite de  $N$  grande, uno considera una gran cantidad de colores. Por ejemplo, consideremos una teoría de gauge  $U(N)$ . El campo de gauge está escrito como una matriz de  $N \times N$ , denotada como  $(A_\mu)$ , que transforma en la representación adjunta de del grupo de gauge  $U(N)$ . Como sabemos la representación adjunta del grupo  $U(N)$  se puede escribir como el producto directo entre las representaciones fundamental y antifundamental de  $U(N)$ . Usamos este hecho para etiquetar al campo de gauge  $A_\mu$  con dos índices,  $(A_\mu)_i^j$ , donde cada índice corre en la representación correspondiente,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ .

Dicha teoría tiene dos parámetros:

La constante de acoplamiento de la teoría de gauge  $g_{YM}$  y el número de color  $N$ , (1.1)

que se los puede reunir, junto al campo  $(A_\mu)_i^j$ , en el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{g_{YM}^2} \text{Tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}], \quad (1.2)$$

donde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ . Introduciendo al parámetro de 't Hooft  $\lambda = g_{YM}^2 N$  podemos escribir (1.2) de la siguiente forma

$$\mathcal{L} = -\frac{N}{\lambda} \text{Tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] = -\frac{N}{\lambda} \text{Tr}(\partial A \partial A + A^2 \partial A + A^4). \quad (1.3)$$

Notemos que hay que tener un particular cuidado cuando tomamos el límite  $N \rightarrow \infty$ . Existen dos límites de principal interés: el primero es el límite de 't Hooft donde  $\lambda \ll 1 \ll N$ , y el segundo es el límite de Maldacena  $1 \ll \lambda \ll N$ . En ambos la teoría de gauge está en una fuerte interacción.

## 1.2. Experimentos de iones pesados

El plasma de quark y gluones es un fenómeno natural de QCD. De hecho, teóricamente se lo conoce desde hace mucho tiempo. Pero hasta hace poco no existían experimentos. En los últimos años, se diseñaron experimentos con iones pesados cuyos objetivos fueron formar el QGP y medir sus propiedades físicas.

Los aceleradores de partículas usualmente hacen colisionar  $e^+e^-$ ,  $pp$  o  $\bar{p}p$ , pero los experimentos con iones pesados hacen colisionar núcleos pesados, como núcleos de oro o plomo. Los átomos pesados, en sí mismos son eléctricamente neutros. Para acelerarlos, uno tiene que ionizarlos. En consecuencia, a tales experimentos se los llama experimentos de iones pesados.

Un notable acelerador de iones pesados es el Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC), que se encuentra en el Laboratorio Nacional Brookhaven y está en operación desde 2000. Otro experimento de iones pesados se ha realizado en el CERN desde 2010 utilizando el Gran Colisionador de Hadrones (LHC). La temperatura del plasma lograda por estos colisionadores se estima que aproximadamente está en  $2T_c$  en el RHIC y aproximadamente  $5T_c$  en el LHC [46]. En este tipo de experimentos, se hacen chocar dos núcleos pesados formándose el plasma si la temperatura es lo suficientemente alta. El plasma existe solo transitoriamente; la alta temperatura del plasma hace que el mismo se expanda generando un enfriamiento debido a la expansión. Finalmente, la temperatura resulta inferior a la temperatura de transición, y entonces los quarks hadronizan. Lo que se observa son los hadrones resultantes. La descripción anterior muestra las dificultades del experimento y su análisis:

- El plasma tiene una complicada evolución en el tiempo.
- Lo que se observa no es QGP en sí, sino solo sus subproductos: los hadrones. Uno tiene que inferir qué pasó a partir de los subproductos. Por lo tanto, no es un sistema fácil de modelar.
- Son muchas las partículas secundarias involucradas en los experimentos. La función del QGP es la de generar un sistema térmico. Luego hay que hacer un seguimiento, de la mayor cantidad de estas partículas.
- Finalmente, la QCD perturbativa no es efectiva para el análisis teórico.

## 1.3. Inesperada conexión entre la teoría de cuerdas y las colisiones en el RHIC

En 2005, los primeros resultados detallados del RHIC se anunciaron en la reunión anual de APS. Este comunicado de prensa tuvo una declaración interesante: la inesperada posibilidad de una conexión entre la teoría de cuerdas y las colisiones del RHIC [47]. Aquí, al hablar de teoría de cuerdas nos referimos a la dualidad AdS/CFT. ¿Cuál es esa conexión inesperada?

En el anuncio del RHIC, se hizo hincapié en que el plasma de quark y gluones no se comporta como un gas libre, sino como un fluido perfecto. Un fluido perfecto se caracteriza por no tener viscosidad. Como un simple ejemplo, consideremos un fluido entre dos placas separadas por una distancia  $L$ , donde la parte superior se mueva con una velocidad  $v$  (Fig. 1.2). A medida que se arrastra el fluido, la placa inferior experimenta una fuerza. Esta fuerza es la manifestación de la viscosidad. En este caso, la fuerza que experimenta la placa inferior por unidad de área  $F/A$  está dada por

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v}{L}, \quad (1.4)$$

y donde la constante de proporcionalidad  $\eta$  se denomina viscosidad de corte.

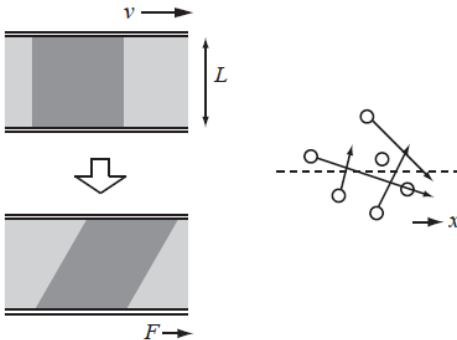


Figura 1.2:

Microscópicamente, sabemos que la viscosidad surge debido a la transferencia de momento entre moléculas. La figura 1.2 (derecha) muestra una vista en primer plano del fluido y ponemos un límite artificial para dividir el fluido en dos partes. Las moléculas colisionan unas con otras e intercambian momento aleatoriamente a través del borde. Pero en la situación donde movemos la placa superior, las moléculas en la mitad superior, en promedio, tienen más momento en la dirección  $x$  que los que están en la parte de la mitad inferior. Estas moléculas lo intercambian, lo que significa que se transporta el impulso en la dirección  $x$  a través del borde en la dirección  $y$ . Este es el origen microscópico de la viscosidad.

A partir de (1.4) vemos que la viscosidad de corte tiene unidades de  $[\eta] = Pa.s = kgm^{-1}s^{-1}$ . Así, podemos esperar del análisis dimensional que la viscosidad de corte esté dada por

$$\eta \simeq \rho \bar{v} l_{mfp} \simeq \epsilon \tau_{mfp}, \quad (1.5)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\bar{v}$  velocidad media de las partículas,  $l_{mfp}$  el camino libre medio,  $\epsilon$  densidad de energía  $\tau_{mfp}$  tiempo libre medio. Ahora bien, de modificar la constante de acoplamiento hacia acoplamiento fuerte, el camino libre medio se vuelve más corto. La viscosidad surge debido a la transferencia de impulso. Luego la transferencia de impulso es menos efectiva en el acoplamiento fuerte. Por lo tanto, *la viscosidad se vuelve más pequeña en el acoplamiento fuerte*. En particular, un fluido perfecto no tiene viscosidad, por lo que un fluido perfecto aparece en el límite de acoplamiento fuerte. Esto es algo contraintuitivo dado que un gas ideal es el límite de un gas libre, sin embargo un fluido perfecto es el límite del acoplamiento fuerte.

Una pequeña viscosidad implica una fuerte interacción. Según el RHIC, el QGP tiene una pequeña viscosidad, lo que implica que está fuertemente acoplado. Esto es un interesante descubrimiento, pero ¿cómo se puede estudiar teóricamente un problema de acoplamiento fuerte? No podemos emplear la QCD perturbativa. La teoría de cuerdas puede ser un buen marco para estudiar un tema así. Por otro lado resulta que la predicción de la viscosidad de corte usando AdS/CFT es cercana al resultado del RHIC [47]. Esta fue la conexión inesperada del anuncio del RHIC.



## Capítulo 2

# Partículas y Gravedad

En este capítulo repasaremos todo lo relacionado a las partículas relativistas y gravedad relativista clásica, para luego presentar los fondos necesarios para nuestros estudios en el capítulo 5.

### 2.1. Partícula

**Acción para la partícula libre relativista en espacio plano:** La acción que describe la dinámica de una partícula libre relativista en el espacio-tiempo de Minkowski (trayectorias tipo-tiempo) está dada por la longitud de la línea de mundo  $\mathcal{C}$

$$S_{part} = -mc^2 \int_{\mathcal{C}} d\tau, \quad (2.1)$$

donde  $\tau$  es el tiempo propio sobre  $\mathcal{C}$ . Puesto que<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + (d\vec{x})^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -c^2 d\tau^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

tenemos<sup>2</sup>

$$cd\tau = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu}}. \quad (2.4)$$

En consecuencia la acción (2.1), para una parametrización arbitraria  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$  de la curva  $\mathcal{C}$  puede ser escrita

$$S_{part} = -mc^2 \int d\lambda \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}, \quad (2.5)$$

donde  $m$  la masa de la partícula (cuya identificación proviene de tomar el límite no relativista  $v \ll c$  en (2.5)). Esta acción es invariante bajo,

- Reparametrizaciones arbitrarias:  $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}(\lambda)$

---

<sup>1</sup> $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski  $\eta = \text{diag}(-+++ \dots)$ .

<sup>2</sup>Recordemos que se pueden definir intervalos tipo-espacio, tipo-luz y tipo-tiempo de la siguiente manera

$$ds^2 \begin{cases} > 0 & \text{tipo-espacio} \\ = 0 & \text{tipo-luz} \\ < 0 & \text{tipo-tiempo.} \end{cases}$$

Si relacionamos dos sistemas de referencia  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$ , podemos escribir al invariante

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (d\vec{x})^2 = -c^2 (dt')^2 + (d\vec{x}')^2. \quad (2.3)$$

- Si para el observador  $\mathcal{O}'$   $d\vec{x}' = 0$  y  $dt' = d\tau$ , obtenemos  $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ . Dado que  $ds$  es un invariante,  $d\tau$  también lo es, y lo llamamos tiempo propio. Por esta razón su importancia.
- Si para el observador  $\mathcal{O}'$   $dt' = 0$  y  $(d\vec{x}')^2 = d\ell^2$ , vemos que  $ds^2 = d\ell^2$ . En consecuencia,  $d\ell$  es un invariante, y la llamamos distancia propia.

- Transformaciones de Poincare:  $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + A^\mu$ .

Las ecuaciones de movimiento clásicas que resultan de variar la acción respecto a las coordenadas  $x^\mu$  ( $\mu = 0, 1, \dots, D-1$ ) en la parametrización afín  $\lambda = \tau$  resultan

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (2.6)$$

y corresponden a líneas rectas en el espacio-tiempo.

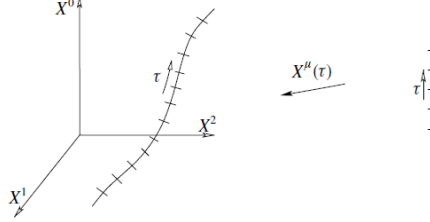


Figura 2.1: Línea de mundo de una partícula. La función  $x^\mu(\tau)$  describe la línea de mundo  $\mathcal{C}$ , parametrizada por  $\tau$ , dentro del espacio-tiempo coordinatizado por  $x^\mu$ .

La acción (2.5) presenta dos desventajas: la primera es que la raíz cuadrada que engloba a las coordenadas, ante un eventual proceso de cuantificación de la teoría, se vuelve una complicación. Y la segunda es que la acción no está bien definida para partículas sin masa. Es posible escribir una acción clásicamente equivalente a (2.5) que resuelve estos problemas agregando un grado de libertad más. Tal acción es

$$\mathcal{S}_{part} = \frac{1}{2} \int d\tau \left[ e(\tau)^{-1} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - e(\tau) m^2 \right]. \quad (2.7)$$

Esta acción conduce a las mismas ecuaciones de movimiento que la acción (2.5) resolviendo los dos problemas anteriormente mencionamos. Variando respecto del campo auxiliar  $e(\tau)$  obtenemos

$$e^2(\tau) = -\frac{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}{m^2}. \quad (2.8)$$

Insertamos a  $e(\tau)$  en (2.7), recuperamos la acción (2.5).

### 2.1.1. Interacción de una partícula con un campo electromagnético

La acción correspondiente a una partícula que se mueve en un campo electromagnético dado. Se compone de dos partes: la acción (2.5) para la partícula libre, y un término que describe la interacción de la partícula con el campo electromagnético. Este último término involucra magnitudes que caracterizan a la partícula y magnitudes que caracterizan al campo. La acción correspondiente a una carga en un campo electromagnético en un espacio plano tiene la forma

$$S = \int d\tau \left( -m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} + e A_\mu \dot{x}^\mu \right). \quad (2.9)$$

Al variarla respecto a  $x^\mu$  obtenemos

$$m \ddot{x}^\mu = e F^{\mu\nu} \dot{x}_\nu, \quad (2.10)$$

donde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Esto es la segunda ley de Newton para una carga en interacción con un campo electromagnético.

### 2.1.2. La acción del campo electromagnético

La acción para un sistema dinámico constituido por el campo electromagnético y partículas cargadas situadas en él consta de tres partes:

$$S = -m \int d\tau + e \int A_\mu dx^\mu - \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.11)$$

la primera sólo depende de las propiedades de las partículas. La segunda involucra la interacción del campo con las partículas. Y la tercera depende solo de las propiedades del campo en sí. Si variamos (2.11) respecto de  $x^\mu$  obtenemos (2.10) y al variar (2.11) respecto de  $A_\mu$  obtenemos

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} j^\nu \quad \text{con} \quad j^\mu = e \int d\tau \dot{x}^\mu(\tau) \delta(\dot{x}^\mu - x^\mu(\tau)) \quad (2.12)$$

esto es, las leyes de Ampere-Maxwell y de Gauss<sup>3</sup>.

## 2.2. Gravedad

En esta sección repasaremos las acciones básicas que describen tanto a partículas en espacios curvos como a la gravedad.

### 2.2.1. Geodésicas

En espacios curvos, las partículas libres no siguen líneas rectas, sino geodésicas. Para encontrar las ecuaciones de movimiento que nos den las geodésicas necesitamos una acción. Para ello reemplazamos  $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$  en (2.5), luego

$$S = -m \int d\tau = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu} \quad (2.14)$$

donde ahora  $d\tau$  es

$$d\tau = \int \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda. \quad (2.15)$$

Variando esta expresión respecto  $x^\mu$  tenemos

$$\begin{aligned} \delta \int d\tau &= \frac{1}{2} \int (-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda})^{-1/2} d\lambda \left( -\delta g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} - 2g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) \\ &= \int d\tau \left\{ g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu + \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu} \dot{x}^\lambda) \delta x^\mu \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Definiendo

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\lambda\rho,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}), \quad (2.17)$$

(2.16) se puede escribir de forma más compacta como

$$\delta \int d\tau = \int d\tau g_{\mu\nu} (\ddot{x}^\nu + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta) \delta x^\mu, \quad (2.18)$$

donde hemos hecho uso de la invarianza de reparametrizaciones para fijar la parametrización afín  $\lambda = \tau$ , de manera que las ecuaciones para geodésicas tipo-tiempo en un campo gravitatorio arbitrario son

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0. \quad (2.19)$$

---

<sup>3</sup>Las leyes de Faraday y de Gauss para el magnetismo, se pueden obtener de la identidad de Bianchi para  $F_{\mu\nu}$ . Tomando derivadas de  $F_{\mu\nu}$  tenemos

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0, \quad (2.13)$$

Por definición, las partículas de prueba masivas son partículas que satisfacen la ecuación geodésica tipo-tiempo<sup>4</sup>.

Por otro lado, podemos considerar geodésicas tipo-espacio que se obtienen al extremizar la distancia propia, es decir,

$$S_0 \sim \int d\ell \quad (2.20)$$

donde<sup>5</sup>

$$d\ell^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \quad (2.22)$$

La ecuación de movimiento en parametrización afín coincide con (2.19). Mas aún, a partir de (2.19) es posible mostrar que en parametrización afín  $\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu} = cte$ .

Una acción muy importante en esta tesis es la generalización de (2.9) a espacios curvos. En donde la generalización natural para trayectorias tipo-tiempo en espacio curvo es

$$S = \int d\tau \left( -m\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} + eA_\mu \dot{x}^\mu \right), \quad (2.23)$$

y para trayectorias tipo-espacio es

$$S = \int d\tau \left( m\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} + eA_\mu \dot{x}^\mu \right), \quad (2.24)$$

esta última (trayectorias tipo-espacio) sera rederivada mediante otro método en el capítulo 6.

### 2.2.2. Acción de Einstein-Hilbert

Para obtener las ecuaciones de Einstein a partir de un principio de mínima acción, necesitamos construir la acción para la relatividad general. Un punto de partida entonces es hallar el Lagrangiano correspondiente. En relatividad general la variable dinámica es la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Como es bien conocido, para cualquier punto de una variedad pseudo-Riemanniana siempre pueden hallarse las coordenadas que lleven a la métrica a la forma  $\eta_{\mu\nu}$  del espacio plano y donde sus primeras derivadas se anulen, de modo que cualquier escalar no trivial debe involucrar al menos segundas derivadas de  $g_{\mu\nu}$ . El tensor de Riemann está hecho de segundas derivadas de la métrica y el único escalar independiente construido a partir del tensor de Riemann es el escalar de Ricci  $R$ . De aquí entonces proponemos para la gravedad la siguiente acción

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda), \quad (2.25)$$

que es llamada acción de Einstein-Hilbert, y la constante  $\Lambda$  se la denomina constante cosmológica. Si la variamos respecto a la métrica<sup>6</sup> obtenemos

$$\delta S_{EH} = \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left( \frac{G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}}{2\kappa^2} \right). \quad (2.28)$$

<sup>4</sup>En la sección 4.2.1 volveremos a discutir la forma de obtener la acción que proporciona las geodésicas.

<sup>5</sup>En espacios curvos, normalmente se utiliza vectores tangentes a la geodésica para definir si una geodésica es tipo-tiempo, espacio o luz. Es decir, definimos a un vector tangente a la geodésica de la siguiente manera

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (2.21)$$

y vemos si cumplen alguna de las siguientes relaciones

$$V^\mu V_\mu \begin{cases} > 0 & \text{tipo - espacio} \\ = 0 & \text{tipo - luz} \\ < 0 & \text{tipo - tiempo.} \end{cases}$$

<sup>6</sup>

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} \left( \frac{R}{2} g^{\mu\nu} - R^{\mu\nu} \right) = \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \left( -\frac{R}{2} g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \right), \quad (2.26)$$

donde definimos

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \quad (2.27)$$



Para encontrar las ecuaciones de movimiento debemos pedir que esta variación sea cero para cualquier  $\delta g^{\mu\nu}$ , luego

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.29)$$

que son las ecuaciones de Einstein en el vacío en presencia de constante cosmológica. La contribución de los campos de materia suma la acción  $S_M$  obteniéndose una acción total,

$$S = \underbrace{S_{EH}}_{\text{Gravedad}} + \underbrace{S_M}_{\text{Materia}}. \quad (2.30)$$

Al variar la nueva acción obtenemos

$$\delta S = \delta S_{EH} + \delta S_M, \quad (2.31)$$

donde

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

en consecuencia

$$\delta S = \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left( \frac{G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}}{2\kappa^2} - \frac{1}{2}T_{\mu\nu} \right), \quad (2.33)$$

y dado que la variación debe ser cero para cualquier  $\delta g^{\mu\nu}$ , las ecuaciones de movimiento para la métrica en presencia de materia son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

Estas son las ecuaciones de campo de Einstein.

### 2.2.3. Acción de Einstein-Hilbert-Maxwell

Si queremos una acción que describa una geometría con constante cosmológica acoplada a un campo de gauge  $U(1)$  dinámico, tenemos que generalizar la acción de Einstein-Hilbert a la llamada acción de Einstein-Hilbert-Maxwell, esto es

$$S_{EHM} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{4} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

Observemos que las contracciones de la parte electromagnética están hechas a través de la métrica  $g_{\mu\nu}$ , esto es:  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} F_{\mu\nu} F_{\rho\lambda}$ . De la variación del segundo término de (2.35)

$$\delta(\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = 2\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} (F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2). \quad (2.36)$$

En consecuencia, la variación con respecto a  $g_{\mu\nu}$  de la acción de Einstein-Hilbert-Maxwell da como resultado las siguientes ecuaciones de movimiento

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{\text{Maxwell}}, \quad \text{donde } T_{\mu\nu}^{\text{Maxwell}} = F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2. \quad (2.37)$$

La ecuación de Euler-Lagrange para  $A_\mu$  resulta

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.38)$$

que no son otra cosa que las ecuaciones de Maxwell sin fuentes.

### 2.2.4. Acción de Einstein-Hilbert-Maxwell-Gauss-Bonnet

Una de las teorías propuesta como una corrección a la relatividad general a distancias cortas, es la teoría de gravedad de Gauss-Bonnet, la cual introduce correcciones de órdenes más altos en la curvatura.

Como es un hecho bien conocido, a la gravedad la describe la teoría general de la relatividad de Einstein. De acuerdo a ésta, la gravedad es un emergente de la geometría del espacio-tiempo, que queda completamente caracterizada por el contenido de materia y energía en el mismo, a través de las ecuaciones de Einstein (2.34).

La acción (2.25) determina por completo la dinámica del espacio-tiempo, y en principio, un ingrediente muy importante, es el hecho de que da lugar a ecuaciones de movimiento de segundo orden, que explican a la fuerza gravitatoria. Por otro lado, existen expresiones de orden mayor en términos del escalar y tensor de Ricci, y el tensor de Riemann que dan lugar también a ecuaciones diferenciales de segundo orden. Un ejemplo de suma importancia y que cumple con este requisito es el término de Gauss-Bonnet,

$$\mathcal{L}_{GB} = a\mathcal{R}^2 + b\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu} + c\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{R}^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (2.39)$$

En donde para cualquier otra terna que no sea  $(a, b, c) \rightarrow (1, -4, 1)$ , las ecuaciones de movimiento contienen derivadas de órdenes más altos. En 4 dimensiones, el término de Gauss-Bonnet es un invariante topológico, en el sentido de que su variación nos entrega una derivada total, por lo que su presencia no contribuye a las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, en dimensión superior, este lagrangiano ya no es un invariante topológico.

La acción que contribuye a la dinámica en 5 o más dimensiones es la acción de Einstein-Hilbert-Maxwell-Gauss-Bonnet

$$S_{EHMGB} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) - \frac{1}{4} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\alpha}{8} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{GB}. \quad (2.40)$$

Para obtener las EOM nos queda por variar con respecto a la métrica el término  $\sqrt{-g}\mathcal{L}_{GB}$ , siguiendo a [48] obtenemos los siguientes resultados

$$\delta(R^2) = (-2RR^{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu R - 2g^{\mu\nu})\delta g_{\mu\nu}, \quad (2.41)$$

$$\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) = \left( \frac{1}{2}(\nabla^\mu \nabla^\nu R + \nabla^\nu \nabla^\mu R) - 2R^{\mu\rho\nu\sigma}R_{\rho\sigma} - \square R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\square R \right) \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.42)$$

$$\delta(R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}) = (-2R^{\mu\rho\sigma\tau}R_{\rho\sigma\tau}^\nu - 4\square R^{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu R + \nabla^\nu \nabla^\mu R - 4R^{\mu\rho\nu\sigma}R_{\rho\sigma} + 4R^\mu_\rho R^{\nu\rho}) \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.43)$$

que al unirlos con (2.26) y (2.36) las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2(T_{\mu\nu}^{\text{Maxwell}} + \frac{\alpha}{4}H_{\mu\nu}), \quad (2.44)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.45)$$

donde

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{GB} - 2\mathcal{R}\mathcal{R}_{\mu\nu} + 4\mathcal{R}_{\mu\gamma}\mathcal{R}^\gamma_\nu + 4\mathcal{R}_{\gamma\delta}\mathcal{R}^\gamma_\mu{}^\delta_\nu - 2\mathcal{R}_{\mu\gamma\delta\lambda}\mathcal{R}_\mu{}^{\gamma\delta\lambda}. \quad (2.46)$$

En el transcurso de toda la tesis usaremos  $\kappa^2 = 2$ .

## 2.3. Teoría de Kaluza-Klein

Las teorías de Kaluza-Klein logran "unificar" la gravedad y el electromagnetismo considerando una teoría de gravedad pura en cinco dimensiones. El punto crucial es tomar a la dimensión extra como periódica. A partir de la Relatividad General en 5D, podemos reproducir las ecuaciones de Einstein y de Maxwell en 4D y una ecuación adicional para un campo escalar  $\phi$ . Consideremos las coordenadas del espacio-tiempo como  $\hat{x}^M = (x^\mu, x^5)$  con  $\mu = 0, 1, 2, 3$  y la coordenada  $x^5$  periódica. En particular queremos reducir la teoría gravitatoria pura en 5D a una en 4D, donde la dimensión extra esta compactificada en un círculo de radio  $L$ . Como es común, la métrica en 5 dimensiones es

$$\hat{ds}^2 = \hat{g}_{MN}dx^M dx^N, \quad (2.47)$$

y la acción para la gravedad pura en 5D se escribe

$$S = \frac{1}{16\pi G_5} \int dx^5 \sqrt{-\hat{g}} \hat{R}. \quad (2.48)$$

Es conveniente reemplazar las quince variables de campo  $\widehat{g}_{MN} = \widehat{g}_{NM}$  por quince nuevas variables  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ,  $A_\mu$ ,  $\phi$ , de acuerdo a las siguientes redefiniciones

$$\widehat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu \quad (2.49)$$

$$\widehat{g}_{\mu 5} = \phi A_\mu \quad (2.50)$$

$$\widehat{g}_{55} = \phi. \quad (2.51)$$

Todas las variables de campo, antiguas y nuevas, son funciones periódicas de la coordenada  $x^5$  en el círculo. En consecuencia todas las variables admiten un desarrollo en serie de Fourier

$$g_{\mu\nu}(x^\mu, x^5) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{\mu\nu}^{(n)}(x^\mu) e^{inx^5/L} \quad (2.52)$$

$$A_\mu(x^\mu, x^5) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_\mu^{(n)}(x^\mu) e^{inx^5/L} \quad (2.53)$$

$$\phi(x^\mu, x^5) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{inx^5/L}. \quad (2.54)$$

Usando estos desarrollos en serie de Fourier, la dependencia en  $x^5$  se hace explícita, de tal manera que la integración en  $x^5$  puede llevarse a cabo. En este caso, surge una acción en 4 dimensiones la cual contiene un número infinito de campos, es decir, las componentes de Fourier  $A_\mu^{(n)}$ ,  $g_{\mu\nu}^{(n)}$ ,  $\phi^{(n)}$ . A este nivel Kaluza impuso la condición de periodicidad, mediante la cual se trunca la acción, reteniendo tan solo los modos cero:

$$g_{\mu\nu}(x^\mu, x^5) = g_{\mu\nu}^{(0)}(x^\mu); \quad A_\mu(x^\mu, x^5) = A_\mu^{(0)}(x^\mu); \quad \phi(x^\mu, x^5) = \phi^{(0)}(x^\mu) \quad (2.55)$$

Así, el elemento de línea 5-dimensional toma la forma

$$\widehat{ds}^2 = \widehat{g}_{MN} dx^M dx^N = g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\mu dx^\nu + \phi^{(0)}(x^\mu) (dx^5 + A_\mu^{(0)}(x^\mu) dx^\mu)^2. \quad (2.56)$$

Al hacer la integración sobre la quinta dimensión, imponiendo la condición de cilindridad, la acción (2.48), la cual es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas en 5 dimensiones, se reduce a una acción 4-dimensional invariante ante transformaciones generales de coordenadas y ante transformaciones de gauge abelianas. Dicha acción en 4 dimensiones es

$$S_4 = \frac{1}{16\pi G_4} \int dx^4 \sqrt{g^{(0)}} (R^{(0)} - \frac{1}{4} \phi^{(0)} F_{\mu\nu}^{(0)} F^{\mu\nu(0)}) \quad (2.57)$$

con

$$G_4 = \frac{G_5}{2\pi L}; \quad F_{\mu\nu}^{(0)} = \partial_\mu A_\nu^{(0)} - \partial_\nu A_\mu^{(0)}. \quad (2.58)$$

Kaluza hizo arbitrariamente

$$\phi^{(0)} = cte \quad (2.59)$$

con lo cual la acción (2.57) se convierte en la acción en 4 dimensiones de Einstein-Maxwell. Imponer (2.59) junto con la ecuación para el campo escalar y con la traza de las ecuaciones de Einstein implican que

$$F_{\mu\nu}^{(0)} F^{\mu\nu(0)} = 0 \quad (2.60)$$

para el campo de Maxwell. Por lo tanto si queremos trabajar en las condiciones en que  $\phi^{(0)} = 1$ , el  $A_\mu^{(0)}$  debe ser tal que verifique (2.60).

### 2.3.1. Movimiento de partículas cargadas en 4 dimensiones a partir de geodésicas en 5 dimesiones

Existen un sin fin de cuestiones por las cuales es interesante estudiar la Teoría de Kaluza-Klein. Nosotros en particular la estudiamos debido a que nos permite obtener la ecuación de geodésicas tipo-espacio de manera elegante.

Como vimos, la ecuación para una geodésica donde solo actúa la gravedad es

$$\ddot{x}^M + \Gamma_{NL}^M \dot{x}^N \dot{x}^L = 0 \quad (2.61)$$

Por otro lado, de (2.56) obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^5} \sim \dot{x}^5 + A_\mu^{(0)} \dot{x}^\mu, \quad (2.62)$$

que es la constante asociada a que la métrica no depende explícitamente de  $x^5$ . Llegado a esta instancia, observemos que si separamos las coordenadas  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  de  $x^5$  obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \ddot{x}^\mu + \Gamma_{NL}^\mu \dot{x}^N \dot{x}^L &= \ddot{x}^\mu + \Gamma_{NL}^\mu \dot{x}^N \dot{x}^L + 2\widehat{\Gamma}_{\nu 5}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^5 + 2\widehat{\Gamma}_{55}^\mu \dot{x}^5 \dot{x}^5 \\ &= \ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda - F_\nu^{\mu(0)} A_\lambda^{(0)} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda - F_\nu^{\mu(0)} \dot{x}^\nu \dot{x}^5 \\ &= \ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda - F_\nu^{\mu(0)} \dot{x}^\mu (A_\lambda^{(0)} \dot{x}^\lambda + \dot{x}^5) = 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Por lo tanto, estas componentes de la ecuación de la geodésica se pueden escribir

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = (A_\lambda^{(0)} \dot{x}^\lambda + \dot{x}^5) F_\nu^{\mu(0)} \dot{x}^\nu, \quad (2.64)$$

que es precisamente la fuerza de Lorentz si identificamos a la constante de movimiento (2.62) con el cociente entre la masa y la carga de la partícula,

$$\dot{x}^5 + A_\mu^{(0)} \dot{x}^\mu = \frac{e}{m}. \quad (2.65)$$

## Capítulo 3

# Dualidad Gauge/Gravedad

Nuestro objetivo en este capítulo es expresar los postulados de la dualidad Gauge/Gravedad [49], [50], y [51]. Estos conjeturan la equivalencia entre teorías de gauge con simetría conforme y teorías gravitatorias en un espacio-tiempo asintóticamente Anti de Sitter. En la sección 3.1, motivaremos desde una perspectiva la teoría de gauge por qué debe haber tal dualidad. Dado que algunos de los contenidos de esta sección son ahora material estándar de libros de texto, no proporcionaremos referencias específicas. El lector interesado en una revisión más detallada de la teoría de cuerdas puede consultar los numerosos libros de texto disponibles, como [52], [53], [54]. El lector interesado en aspectos complementarios o detalles adicionales sobre la dualidad gauge/cuerdas sugerimos consultar algunas de las muchas revisiones existentes, por ejemplo [55], [56], [57], [58], [59], [60], [61], [62], [63].

Las teorías de gauge describen todas las fuerzas fundamentales conocidas excepto la gravedad, estas son: la fuerza electromagnética, la débil y la fuerte. Así, la fuerza electromagnética está descrita por una teoría de Gauge  $U(1)$ , la débil por una teoría de gauge  $SU(2)$  y la fuerza fuerte está descrita por una teoría de gauge  $SU(3)$ . Sin embargo, no es sencillo realizar cálculos en regímenes de acoplamiento fuerte. Por lo tanto, en el régimen de baja energía cuando la fuerza fuerte es literalmente fuerte, no contamos con técnicas analíticas para su estudio. La dualidad  $AdS/CFT$  propone analizar teorías de gauge en acoplamiento fuerte usando espacios-tiempos débilmente curvados y por ésta razón su gran importancia.

### 3.1. Motivando la dualidad

La correspondencia  $AdS/CFT$  es una dualidad que relaciona teoría cuántica de campos (QFT) con la gravedad. Más precisamente, la correspondencia relaciona la física cuántica de muchos sistemas fuertemente correlacionados con la dinámica clásica de la gravedad en una dimensión superior. Esta dualidad también se conoce como la dualidad holográfica o correspondencia gauge/gravedad. En su formulación original [49], [50] y [51], la correspondencia relacionó una teoría de campos con simetría conforme de cuatro dimensiones con la geometría de un espacio Anti de Sitter ( $AdS$ ) en cinco dimensiones.

En el estudio de los fenómenos colectivos en la física de la materia condensada, es bastante común que cuando un sistema está fuertemente acoplado, se reorganice de tal forma que surjan nuevos grados de libertad débilmente acoplados y el sistema pueda describirse mejor en términos de campos que representen las excitaciones emergentes. La dualidad holográfica es un nuevo ejemplo de este paradigma. La nueva característica es que los campos emergentes viven en un espacio con una dimensión extra y que la teoría dual es una teoría de la gravedad. Como argumentaremos a continuación, la dimensión extra está relacionada con la escala de energía de la QFT. La descripción holográfica es una geometrización de la dinámica cuántica de los sistemas con un gran número de grados de libertad, lo que pone de manifiesto que existen conexiones profundas entre la mecánica cuántica y la gravedad.

La dualidad se puede motivar a través del grupo de renormalización de Wilson discretizando al sistema en pequeños rectángulos descripto a partir de la teoría de campos. Consideremos un sistema sin gravedad,

donde el tamaño del sistema discretizado es  $a$  y el hamiltoniano viene dado por

$$H = \sum_{x,i} J_i(x, a) \hat{\mathcal{O}}^i(x), \quad (3.1)$$

donde  $x$  denota los diferentes rectángulos del sistema discretizado, e  $i$  etiqueta los diferentes operadores  $\hat{\mathcal{O}}^i$ . Los  $J_i(x, a)$  son las constantes de acoplamiento (o fuentes) de los operadores en el punto  $x$ . Observemos que hemos incluido un segundo argumento en  $J_i$ , para dejar claro que corresponden a un espaciado  $a$  del sistema discretizado. En el enfoque del grupo de renormalización, para comenzar, tomemos como representante a un elemento del sistema formado por varios rectángulos, para luego aumentar el espaciado y reemplazar estos múltiples sitios por un solo sitio con el valor promedio de las variables discretizadas. En este proceso, el hamiltoniano conserva su forma (3.1) pero diferentes operadores se pesan de manera diferente. En consecuencia, los acoplamientos  $J_i(x, a)$  cambian en cada paso. Supongamos que duplicamos el espaciado de los rectángulos en cada paso. Entonces, tendríamos una sucesión de acoplamientos del tipo

$$J_i(x, a) \rightarrow J_i(x, 2a) \rightarrow J_i(x, 4a) \rightarrow \dots \quad (3.2)$$

Por lo tanto, las fuentes adquieren una dependencia en la escala  $a$  en el proceso, en donde podemos escribirlas como  $J_i(x, u)$ , donde  $u = (a, 2a, 4a, \dots)$  es la escala que prueba el sistema. La evolución de las fuentes con la escala esta determinada por las ecuaciones

$$u \frac{\partial}{\partial u} J_i(x, u) = \beta_i(J_i(x, u), u) \quad (3.3)$$

donde  $\beta_i$  es la llamada función beta de  $i$ -ésima constante de acoplamiento. En acoplamiento debil, en general  $\beta_i$  puede ser obtenida con teoría de perturbaciones. En acoplamiento fuerte, la propuesta de AdS/CFT propone considerar  $u$  como una dimensión extra. En este esquema la sucesión de cuadrículados a diferentes valores de  $u$  son considerados como diferentes planos de un nuevo espacio de mayor dimensión. Además, las fuentes  $J_i(x, u)$  son consideradas como campos en un espacio con una dimensión extra, esto lo identificamos

$$J_i(x, u) = \phi_i(x, u). \quad (3.4)$$

La dinámica de la fuente  $\phi_i$  esta determinada por alguna acción. En la dualidad AdS/CFT, la dinámica de  $\phi_i$  está determinada por alguna teoría de la gravedad (es decir, por alguna métrica). Por lo tanto, podemos considerar la dualidad holográfica como una geometrización de la dinámica cuántica codificada por el grupo de renormalización. Los acoplamientos microscópicos de la teoría de campo en el UV pueden identificarse con los valores de borde de los campos en el *bulk*. Por lo tanto, se puede decir que la teoría de campo vive en el borde de un espacio de dimensión mayor (ver figura 3.1).

Las fuentes  $\phi_i$  de la teoría gravitatoria dual debería tener la misma estructura tensorial de su correspondiente operador dual  $\hat{\mathcal{O}}^i$  de la teoría de campos, de tal forma que el producto  $\phi_i \hat{\mathcal{O}}^i$  forme un escalar. Por lo tanto, un campo escalar debería ser dual a operador escalar, un campo vectorial  $A_\mu$  debería ser dual a una corriente  $J^\mu$ , mientras que un campo de spin dos, simétrico y de segundo orden como la métrica  $g_{\mu\nu}$  debería ser dual a un tensor simétrico  $T_{\mu\nu}$  como el tensor de energía-momento de la teoría de campo.

La dualidad gauge/gravedad establece que el número de grados de libertad coincida en ambos lados de la correspondencia. Esto puede entenderse considerando una teoría de campos en  $d$  dimensiones espacio temporales (es decir, en  $d - 1$  dimensiones espaciales más el tiempo). El número de grados de libertad de dicho sistema está medido por la entropía. Por lo tanto, si  $R_{d-1}$  es una región de dimensión espacial, a tiempo constante, dado que la entropía es una magnitud extensiva

$$S_{QFT} \sim \text{Vol}(R_{d-1}). \quad (3.5)$$

Por otro lado, de acuerdo a la dualidad, la teoría de gravedad se define en un espacio-tiempo  $(d+1)$ -dimensional. Debido a la fórmula de Bekenstein-Hawking la entropía de la teoría gravitatoria es

$$S_G = \frac{1}{4G_N^{(d+1)}} A_H, \quad (3.6)$$

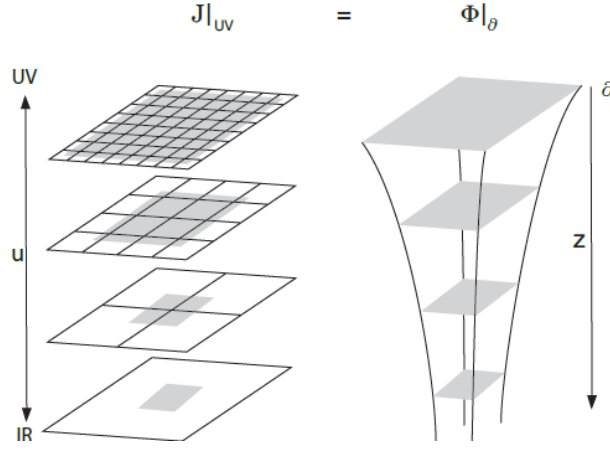


Figura 3.1: La dimensión extra ('radial') del *bulk* es la escala de resolución de la teoría de campo. La figura de la izquierda indica una serie de transformaciones en bloque etiquetadas por un parámetro  $z$ . La figura de la derecha es una representación esquemática del espacio  $AdS_{d+1}$ , que organiza la información de la teoría de campo de la misma manera. En este sentido, la imagen del *bulk* es un holograma: las excitaciones con diferentes longitudes de onda se colocan en diferentes lugares en la imagen del *bulk*.

donde  $G_N^{(d+1)}$  es la constante de Newton en  $(d+1)$  dimensiones y  $A_H$  denota el área del horizonte de sucesos. De esta manera, en una teoría de gravedad, la entropía es proporcional al área que contiene al sistema en cuestión. Esto se conoce como principio holográfico [64], [65], [66], [67], y es una propiedad esencial para la validez de la dualidad AdS/CFT.

En conclusión, la entropía de un sistema gravitatorio extendido sobre una región  $d$ -dimensional satisface

$$S_G \sim Vol(\partial R_d) \sim Vol(R_{d-1}) \quad (3.7)$$

que está de acuerdo con el comportamiento de (3.5).

Luego, asumiendo que una teoría de campos  $d$ -dimensional puede describirse por una teoría de gravedad de  $d+1$  dimensiones, podemos intentar derivar algunas propiedades del espacio-tiempo de  $(d+1)$  dimensiones. La métrica más general en  $d+1$  dimensiones consistente con simetría Poincare  $d$ -dimensional correspondiente al espacio de la teoría de gauge, la podemos escribir como

$$ds^2 = \Omega^2(z)(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2), \quad (3.8)$$

donde  $z$  denota la dirección espacial extra. Notemos que la simetría de Poincare en  $t, \vec{x}$  implica que el factor  $\Omega(z)$  solo depende de  $z$ . Si consideramos teorías de campos conformes (CFT), entonces podemos determinar  $\Omega(z)$  usando las restricciones de simetría adicionales que posee. Una teoría invariante conforme es invariante bajo el escaleo

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu, \quad (3.9)$$

con  $\lambda$  constante. Esta transformación será una simetría de la métrica (3.8), si simultáneamente transformamos la coordenada  $z$  ( $z \rightarrow \lambda z$ , ya que  $z$  representa una escala de longitud en la teoría del borde). Luego necesitamos que  $\Omega(z)$  transforme según

$$\Omega(z) \rightarrow \lambda^{-1}\Omega(z) \text{ bajo } z \rightarrow \lambda z. \quad (3.10)$$

de manera que

$$\Omega(z) = \frac{L}{z}, \quad (3.11)$$

donde  $L$  es una constante. En consecuencia, la métrica (3.8) toma la forma

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2), \quad (3.12)$$

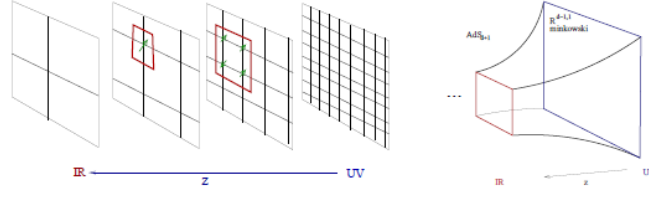


Figura 3.2: La dimensión extra ('radial') del *bulk* es la escala de resolución de la teoría de campo. La figura de la izquierda indica una serie de transformaciones en bloque etiquetadas por un parámetro  $z$ . La figura de la derecha es una representación esquemática del espacio  $AdS_{d+1}$ , que organiza la información de la teoría de campo de la misma manera. En este sentido, la imagen del *bulk* es un holograma: las excitaciones con diferentes longitudes de onda se colocan en diferentes lugares en la imagen del *bulk*. La conexión entre estas dos imágenes se continúa en [68].

que es precisamente el elemento de línea de un espacio-tiempo  $AdS_{d+1}$ . Esta es una familia de copias de espacios de Minkowski parametrizados por una coordenada radial  $z$  cuyo tamaño se reduce cuando aumenta el borde asintótico del espacio que está en  $z \rightarrow 0$ , al interior de  $z \rightarrow \infty$ . Una imagen de esto, es figura 3.2. El parámetro libre  $L$  llamado radio de AdS, tiene dimensión de longitud, y quedará claro qué significa en la teoría de campos a continuación.

Además de la simetría de Poincaré y de escala (3.9), una teoría de campos conforme en  $d$  dimensiones también es invariante bajo transformaciones conformes especiales, que en conjunto forman el grupo conforme en  $d$ -dimensiones  $SO(2, d)$ . Resumiendo, el grupo de isometría de (3.12) es  $SO(2, d)$ , que coincide exactamente con la teoría de campos.

Nos gustaría ahora escribir una teoría gravitatoria que satisfaga los requisitos de simetría (en este caso, la covarianza general) con un número mínimo de derivadas. Sin duda, la teoría más adecuada en este sentido, que tiene el espacio-tiempo de AdS como una solución, es la acción de Einstein-Hilbert con una constante cosmológica negativa

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (\mathcal{R} - 2\Lambda + \dots), \quad (3.13)$$

donde  $-2\Lambda = d(d-1)/L^2$  es una constante cosmológica negativa, parametrizada en términos del radio de AdS  $L$  y los puntos "...." significan que se pueden añadir tanto términos de materia, así como términos de curvatura de orden más altos.

Después de haber identificado el espacio  $AdS$  como el dual de gravitatorio de la teoría de campos con invariancia conforme, podemos considerar el argumento que nos llevó a la ecuación (3.7) para hacer coincidir el número de grados de libertad de ambos lados de la dualidad.

Primero contemos el número de grados de libertad de la teoría de campos. Coloquemos el sistema en una caja espacial de lado  $R$  donde está subdividido en pequeñas celdas de lado  $\epsilon \rightarrow 0$ . En un espacio-tiempo de  $d$  dimensiones el sistema tiene  $R^{d-1}/\epsilon^{d-1}$  celdas. En consecuencia el número de grados de libertad total del sistema es

$$N^{QFT} = \left( \frac{R}{\epsilon} \right)^{d-1} c_{QFT}, \quad (3.14)$$

donde  $c_{QFT}$  es el número de grados de libertad de cada celda, también llamada carga central. Para teorías de campos con grupo de simetría  $SU(N)$ ,  $c_{QFT} \sim N^2$ .



Por otro lado, calculemos el número de grados de libertad de la solución de  $AdS_{d+1}$ . De acuerdo con el principio holográfico y la fórmula de Bekenstein-Hawking (6), el número de grados de libertad contenidos en una región determinada es igual a la entropía máxima, dada por

$$N_G^{AdS} = \frac{A_H}{4G_N^{(d+1)}} \quad (3.15)$$

donde

$$A_H = \int_{\mathbb{R}^{d-1}, z=\epsilon} d^{d-1}x \sqrt{g} = \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}x = \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{d-1} L^{d-1} \quad (3.16)$$

y por lo tanto (3.15) nos queda

$$N_G^{AdS} = \frac{L^{d-1}}{4G_N^{(d+1)}} \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{d-1}. \quad (3.17)$$

Comparando esta última ecuación con (3.14), podemos identificar

$$N^2 = \frac{1}{4} \frac{L^{d-1}}{G_N^{(d+1)}}. \quad (3.18)$$

Esto nos brinda una conexión entre la gravedad y la QFT. Notemos que (3.13) toma forma

$$S = \frac{L^{d-1}}{G_N^{(d+1)}} \int d^{d+1}x \{\dots\dots\} = N^2 \int d^{d+1}x \{\dots\dots\} \quad (3.19)$$

como vemos  $N$  grande implica el límite semiclásico de la integral de camino, y gravedad débilmente acoplada. Así, tomando en cuenta la definición de la longitud de Planck como  $G_N^{(d+1)} = (l_P)^{d-1}$ , concluimos que la gravedad clásica es confiable cuando

$$\left(\frac{L}{l_P}\right)^{d-1} \gg 1, \quad (3.20)$$

y que en esta condición la QFT tiene una descripción gravitatoria débilmente acoplada.

## Conección UV/IR

Debido al factor de *warping*  $L^2/z^2$  frente a la métrica de Minkowski en (3.12), las escalas de energía y longitud a lo largo de las direcciones de Minkowski en  $AdS_{d+1}$  se relacionan con las de la teoría de gauge mediante el factor  $\Omega$ . Más explícitamente, consideremos un objeto con energía  $E_{YM}$  y tamaño  $d_{YM}$  en la teoría de gauge. Estas son la energía y el tamaño del objeto medido en unidades de las coordenadas  $t$  y  $\vec{x}$ . De (3.12) vemos que la correspondiente energía propia  $E$  y el tamaño propio  $d$  de este objeto en el *bulk* son

$$d = \frac{L}{z} d_{gauge}, \quad E = \frac{z}{L} E_{gauge} \quad (3.21)$$

donde la segunda relación se desprende del hecho de que la energía está conjugada con el tiempo, y por lo tanto se escala con el factor de escala opuesto. Vemos así que los procesos físicos en el *bulk* con energías propias idénticas pero que ocurren en diferentes posiciones radiales corresponden a procesos de la teoría de gauge con energía de  $E_{YM} \sim 1/z$ . Esta relación entre la dirección radial  $z$  en el *bulk* y la escala de energía de la teoría del borde hace concreta la discusión heurística con la que iniciamos esta sección que nos llevó a identificar la dirección  $z$  con la dirección a lo largo del flujo del grupo de renormalización de la teoría de gauge. En particular, el límite de alta energía (UV)  $E_{YM} \rightarrow \infty$  corresponde a  $z \rightarrow 0$ , es decir, a la región cercana al borde, mientras que el límite de baja energía (IR)  $E_{YM} \rightarrow 0$  corresponde a  $z \rightarrow \infty$ , es decir, a la región cercana al horizonte.

## 3.2. Algunos resultados importantes

Genéricamente, cuando hablamos de holografía en el contexto de la dualidad AdS/CFT, nos estamos refiriendo a la equivalencia entre teorías gravitatorias y teorías cuánticas sin gravedad en un espacio-tiempo de dimensión más baja. La dualidad AdS/CFT es una realización concreta de una relación holográfica entre 2 teorías. La correspondencia ha sido establecida a fines de los 90 por [49], [50], y [51], pero antes de ellos, se elaboraron varias ideas que colaboraron a sugerir que un principio holográfico podía ser razonable. Esos descubrimientos, entre otros, fueron:

- Las teorías de gauge son teorías de cuerdas. G. t'Hooft [69] estudió la estructura de las interacciones en teorías de gauge  $U(N_c)$ , y mostró que, en un límite particular  $N_c \rightarrow \infty$  y  $\lambda = 4\pi g_s N_c$  fijo, la expansión perturbativa tiene una estructura topológica en potencias de  $1/N_c$  similar a la que se encuentra en la teoría perturbativa de las cuerdas cerradas en potencias de la constante de acoplamiento de la cuerda  $1/g_s$ .
- Relación entre  $AdS_3$  Asintótico y una  $CFT_{1+1}$ . Brown y Henneaux encontraron una relación explícita entre gravedad en  $AdS_3$  y  $CFT_{1+1}$  [70]. La simetría  $CFT_{1+1}$  es  $\infty$  dimensional y hace a la teoría una de las CFT más estudiadas, por otro lado la gravedad en 3 dimensiones es una teoría gravitatoria particularmente simple. Ellos mostraron que asintóticamente el álgebra de la isometría del grupo de  $AdS_3$  es el álgebra de Virasoro, con la carga central relacionada a la constante de acoplamiento que esta dado por

$$c = \frac{3R}{2G_N^{(3)}}. \quad (3.22)$$

- Las p-branas de gravedad son Dp-branas en teorías de cuerdas. En 1995, Polchinski [71] mostró que las Dp-branas y p-branas son equivalentes. Calculó las tensiones y cargas de las D-branas a partir de la teoría de cuerdas, y lo relacionó con los resultados obtenidos de las p-branas (soluciones de supergravedad). Esto dió origen a la segunda revolución de la teoría de cuerdas, dado que después de ello, se pudieron realizar cálculos que no fueron perturbativos a partir de las D-branas.
- Principio Holográfico. La estructura causal intrínseca de la gravedad implica varias restricciones sobre la entropía, declarando que para un dado volumen, la entropía depende del borde del volumen. El Principio Holográfico [72], [73] afirma que

*la información contenida en un volumen  $V_{d+1}$  está codificada en el área  $A_d$  del borde de este volumen en unidades de Planck.*

La realización matemática de dicho principio es la ecuación (3.6).

El nombre de "principio holográfico" se refiere al hecho de que este principio es similar a un holograma, que como es bien conocido en óptica, toda la información que describe el volumen está almacenada en la superficie.

- Igualdad de secciones eficaces. En [74] Klebanov calculó la sección eficaz de absorción de campos escalares para 3-branas extremas y la comparó con la sección eficaz calculada a partir de D3-branas, obteniendo los mismos comportamientos con respecto a la energía. Resultados similares se obtuvieron en [75], [76].
- Polyakov tuvo algunas ideas acerca de cuerdas propagándose en dimensiones extra, duales a confinamiento (para esto ver [77]). El fue quien relacionó la energía de la teoría de campos con la coordenada radial. Estas ideas inspiraron a Maldacena a la formulación de la conjetura.

## 3.3. Generalización de la conjetura de Maldacena

En la sección anterior, mencionamos los resultados más importantes que llevaron a descubrir la conjetura de Maldacena. Aunque la dualidad AdS/CFT es una idea que se originó a partir de la teoría de cuerdas, hace un tiempo la dualidad se independizó de dicha teoría. La dificultad de probar su validez, motivó un

cambio de perspectiva en la comunidad. Se toma a la conjetura como una herramienta para el cálculo de fenómenos en acomplamiento fuerte a partir de cálculos clásicos de gravedad. Los resultados obtenidos son consistentes con la intuiciones físicas y proveen una comprensión alternativa para fenómenos no triviales en teoría de campos.

**Postulado 1:**

*Teoría de Gauge  $d$  dimensional con  $N^2$  grados de libertad = Teoría de gravedad en un espacio-tiempo asintóticamente  $AdS_{d+1}$  de radio  $L$ .*

Donde la conexión entre las dos teorías es

$$N^2 = \left( \frac{L}{l_p} \right)^{d-1}. \quad (3.23)$$

Esta dualidad afirma que la física de  $d$  dimensiones en un espacio plano está relacionada con la física de  $d+1$  dimensiones en un espacio curvo. En este sentido, es que la dualidad AdS/CFT es llamada teoría holográfica. Un holograma óptico codifica una imagen tridimensional de un objeto en dos dimensiones. Similarmente, una teoría holográfica que vive en  $d+1$  dimensiones se codifica en una teoría de  $d$  dimensiones. En consecuencia, se desprende de este postulado lo que mencionabamos en la motivación dada en la sección 3.1. El espacio-tiempo de la QFT coincide con el borde del espacio tiempo curvo asintóticamente AdS.

El postulado anterior corresponde al caso de temperatura cero. A temperatura finita tenemos

**Postulado 2:**

*Una teoría de Gauge en  $d$  dimensiones a temperatura finita  $T_{gauge} =$  Teoría de gravedad en un espacio-tiempo asintóticamente  $AdS_{d+1}$  con un agujero negro y temperatura  $T_{Hawking}$ .*

$$T_{gauge} = T_{Hawking}. \quad (3.24)$$

Usando un agujero negro, se puede obtener una visión de la holografía, una teoría gravitatoria de  $d+1$ -dimensiones corresponde a una teoría de campos en  $d$ -dimensiones. Como sistema de temperatura finita, un agujero negro tiene entropía, siendo esta proporcional al área del horizonte. Este comportamiento es muy diferente al usual comportamiento de la entropía estadística que es proporcional al volumen del sistema. Pero un área en  $d+1$ -dimensiones es un volumen en  $d$ -dimensiones. Esto implica que si un agujero negro puede ser descrito por una teoría de campos de  $d$ -dimensiones, el agujero negro debería vivir en un espacio-tiempo de  $d+1$  dimensiones.

El postulado mencionado anteriormente nos dice que un espacio-tiempo independiente del tiempo que contenga un agujero negro es sinónimo de temperatura, ya que esta está relacionada con la radiación de Hawking. En consecuencia es natural pensar que este tipo de fondos van a describir, por medio de la dualidad, teorías de campos en equilibrio ya que tienen asociada una temperatura. Esto nos lleva al siguiente postulado:

**Postulado 3:** *El dual holográfico de una teoría de campos en equilibrio a temperatura  $T$  en el borde es un espacio-tiempo (estacionario) con agujero negro en el bulk. La temperatura de Hawking del agujero negro es la temperatura de la teoría de campos dual. El dual de un sistema fuera de equilibrio de teorías de campos se corresponde con un espacio-tiempo dependiente del tiempo en el bulk.*

La realización matemática de los postulados 1, 2 y 3 nos lleva al

**Postulado 4:**

$$Z_{QFT}[J_i = \phi_0] = Z_{grav}[\phi_i|_{boundary} = \phi_0]. \quad (3.25)$$

donde se afirma que las funciones de partición de ambas teorías son equivalentes.  $Z_{QFT}$  es la función generatriz de la teoría de gauge, y  $Z_{AdS}$  es la función generatriz de la teoría de gravedad. Este postulado es la

clave que realiza la dualidad AdS/CFT y que nos permite calcular funciones de correlación en QFT a partir de gravedad. Las funciones de correlación

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle, \quad (3.26)$$

son los objetos naturales en CFT y en sistemas fuera de equilibrio. En teoría de campos esos correladores son calculados a partir de la función generatriz, obtenida deformando la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  mediante una fuente  $\hat{J}^i$

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \sum_i J_i(x) \hat{\mathcal{O}}^i \equiv \mathcal{L} + \mathcal{L}_J. \quad (3.27)$$

luego

$$Z_{QFT}[J_i] = \langle e^{\int \mathcal{L}_J} \rangle_{QFT} \quad (3.28)$$

y los correladores los obtenemos a partir de las derivadas funcionales de  $Z$ :

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle = \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} Z_{\mathcal{O}}[J(x)]|_{J(x)=0}. \quad (3.29)$$

La descripción dual de este cálculo se corresponde con la asociación

$$\underbrace{\hat{\mathcal{O}}}_{CFT} \leftrightarrow \underbrace{\phi}_{AdS}. \quad (3.30)$$

Llamamos  $\phi_0(x)$  al valor en el borde de  $\phi(z, x)$ :

$$\phi_0(x) = \phi(z=0, x) = \phi|_{\partial AdS}(x). \quad (3.31)$$

El campo  $\phi_0(x)$  se identifica con la fuente de algún operador  $\hat{\mathcal{O}}$  en la QFT. Es decir, la receta del cálculo corresponde a identificar

$$J_i(x) = \phi_0(x). \quad (3.32)$$

En general éstas fuentes no están bien definidas en  $z=0$ , ya que típicamente son divergentes en el borde, pero el límite:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta} \phi(z, x) = \varphi(x), \quad (3.33)$$

sí esta bien definido. Esta identificación se entiende en QFT como una renormalización del  $\hat{\mathcal{O}}$ , en consecuencia, la manera de hacer cálculos concretos dentro de la conjetura consiste en identificar la funcional generatriz de funciones de correlación de la teoría de campos con la función de partición de la teoría de gravedad, donde las corrientes de la primera corresponden a las condiciones de contorno de la segunda.

El punto fundamental de la correspondencia es que el régimen cuántico de la teoría de gauge corresponde al régimen clásico de la teoría de gravedad, en el cual el miembro derecho de la ecuación (3.25) se puede reemplazar por su aproximación semiclásica, obteniéndose

$$Z_{QFT}[J_i] \approx e^{iS_{grav-on-shell}^{AdS}[\phi_i^{clas}|_{\text{borde}}=J_i]}, \quad (3.34)$$

donde  $S_{AdS}^{AdS}[\phi_i^{clas}|_{\text{boundary}}=J_i]$  es la acción de la teoría de gravedad evaluada en la solución clásica que se obtiene cuando se impone al campo  $\phi_i$  la condición de contorno  $\phi_i|_{\text{boundary}}=J_i$ . Es decir, que basta con conocer la solución clásica de la teoría de gravedad para poder evaluar todas las funciones de correlación del operador dual de la teoría de gauge. La aproximación semiclásica en gravedad corresponde al límite de  $N$  grande en la teoría de gauge. Este postulado se puede resumir como

Un campo en el *bulk* actúa como una fuente externa de un operador del borde.

Cuando evaluamos en la solución la acción de gravedad aparecen divergencias asociadas al volumen infinito de *AdS* y debemos renormalizar. Para ello, existe un procedimiento conocido como renormalización

holográfica [78, 79] (para seguir con más profundidad ver [80]). Así, la acción clásica se debería sustituir por una versión normalizada, que vamos a denotar por  $S_{grav}^{ren}$  y la función generatriz se convierte en

$$\ln Z_{QFT} = S_{grav}^{ren}[\phi \rightarrow \phi_0]. \quad (3.35)$$

La función de  $n$ -puntos puede ser calculada a partir de las derivadas funcionales con respecto a  $\varphi = \phi/z^\Delta$ :

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle = \frac{\delta^n S_{grav}^{ren}[\phi]}{\delta \varphi(x_1) \dots \delta \varphi(x_n)} \Big|_{\varphi=0}. \quad (3.36)$$

A esto se lo conoce como correspondencia campo/operador.

Siguiendo en línea con lo que nos dejó el Postulado 4, en la sección 3.1 mencionamos el ejemplo concreto donde la simetría global de la teoría conforme  $SO(2, d)$  coincidía con las isometrías de  $AdS_{d+1}$ , esto sugiere

**Postulado 5:** *AdS/CFT es una dualidad local-global. Simetrías globales en la QFT son duales a simetrías de gauge locales en el bulk.*

Veamos algunos ejemplos: La propiedad más básica de la teoría del borde (CFT) la tiene el tensor energía-momento. Este tensor, es eventualmente una corriente de Noether asociada con las traslaciones globales de espacio y tiempo, produciendo que el momento y la energía se conserven. De manera similar, la teoría de campos conforme del borde también resulta invariante frente a transformaciones globales de escala y transformaciones conformes especiales. En la sección anterior mostramos con (3.8) y (3.9) que estas transformaciones conformes globales se manifiestan como isometrías de la geometría del *bulk*: estas son transformaciones de coordenadas locales (difeomorfismos, covarianzas generales) que están en el corazón de la estructura de la teoría de Einstein. Teniendo en mente a la ecuación (3.27), el papel de  $\hat{J}^i$  y  $\hat{\mathcal{O}}^i$  lo cumplirán  $g_{\mu\nu}(z=0)$  y  $\hat{T}_{\mu\nu}$  respectivamente en este caso, donde  $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d-1$ .

Un segundo ejemplo de este postulado, es considerar una teoría en el borde con corriente  $\hat{J}_\mu$   $U(1)$ . Naturalmente, esta corriente va a estar asociada a añadir un campo de Maxwell  $A_\mu$  con simetría  $U(1)$  en el *bulk*. A este  $A_\mu$  se lo consigue añadiendo a la acción (3.13) el lagrangiano de Maxwell, obteniendo así, la acción de Einstein-Hilbert-Maxwell (2.35), que discutiremos en la sección 5.4. En este caso  $\hat{J}^i$  y  $\hat{\mathcal{O}}^i$  de (3.27), son  $A_\mu(z=0)$  y  $\hat{J}^\mu$  respectivamente.

Resumiendo, el campo  $\phi_0(x)$  que se acopla al operador  $\hat{\mathcal{O}}$ , usualmente puede identificarse mediante simetrías, deben tener los mismos números cuánticos. Podemos resumir los resultados de los ejemplos mencionados, como

$$\mathcal{L}_{CFT} + \sum_i J_i(x) \hat{\mathcal{O}}^i \equiv \mathcal{L}_{CFT} + \mathcal{L}_J \rightarrow \mathcal{L}_{CFT} + \int d^d x \sqrt{g} (g_{\mu\nu} \hat{T}^{\mu\nu} + A_\mu \hat{J}^\mu). \quad (3.37)$$

El operador asociado al gravitón se corresponde con el tensor de Energía-momento y el asociado con un campo de gauge en  $AdS$  a una corriente global. Nótemos que la conservación de  $\hat{T}_{\mu\nu}$  ó de  $\hat{J}_\mu$  se asocia con una invariancia de gauge a nivel de las fuentes. Este es un hecho general de AdS/CFT, simetrías de gauge en el *bulk* son simetrías globales en la teoría del borde. Siguiendo esto, también podemos decir que corrientes asociadas con cargas conservadas en el borde, son dualizadas en campos de gauge.

### 3.4. Regímenes de validez

La conjetura de Maldacena nos permite analizar una teoría de gauge fuertemente acoplada mediante el estudio de un espacio-tiempo AdS débilmente curvo. Sin embargo, existen diferencias importantes entre la real QCD  $SU(3)$  y la teoría de gauge estudiada en AdS/CFT. Primero, AdS/CFT considera una teoría de gauge con grupo de gauge  $SU(N_c)$ . En tal teoría,  $N_c$  es un parámetro adicional a  $g_{YM}$ , y el acoplamiento fuerte se da en el llamado límite de  $N_c$  grande, a tal efecto resulta útil parametrizar la teoría en términos de [72]  $(g_{YM}, N) \rightarrow (\lambda \equiv g_{YM}^2 N, 1/N)$ . En esta tesis consideramos el límite de 't Hooft, esto es  $N$  grande donde  $N \rightarrow \infty$   $\lambda$  fijo. De manera que solo contaremos con un parámetro de expansión que será  $\lambda$ .

El estudio de los diagramas de lazos en la teoría de campos muestra que el análisis perturbativo de la teoría Yang- Mills es válido cuando  $\lambda \ll 1$ , lo que esto implica

$$\lambda = g_{YM}^2 N_c = 4\pi g_s N_c = \frac{L^4}{l_s^4} \ll 1 \Rightarrow L \ll l_s, \quad (3.38)$$

de manera que en esta descripción tenemos un espacio muy curvado respecto del tamaño de la cuerda.

Por otro lado, la descripción clásica de gravedad resulta confiable en el límite opuesto, cuando la longitud característica del espacio, en nuestro caso el radio de curvatura  $L$  de  $AdS_5$  y de  $S^5$ , es grande comparado con la escala de la teoría de cuerdas (esto es  $L \gg l_s$ )

$$L \gg l_s \Rightarrow \lambda \gg 1. \quad (3.39)$$

De este análisis resulta que los regímenes de validez de la teoría de gravedad (3.39) y de la teoría de campos (3.38) son totalmente incompatibles. Es por esta razón que esta correspondencia es llamada dualidad "débil/fuerte". La conjetura establece que las dos teorías describen el mismo sistema físico, pero cuando una teoría está acoplada débilmente, la otra lo está fuertemente y viceversa. Obviamente, esto hace que la correspondencia sea difícil de probar pero, simultáneamente, la vuelve muy útil. La conjetura nos permite explorar fenómenos en regiones no-perturbativas de teorías de gauge en términos de una teoría de gravedad débilmente acoplada y viceversa.

Para reforzar lo dicho en el párrafo anterior, consideremos al lagrangiano efectivo de gravedad  $\mathcal{L}$  en el límite planar  $N \rightarrow \infty$ ,  $g_{YM} \rightarrow 0$ , solo tenemos correcciones para la topologías de esferas en teoría de cuerdas. Realizando una expansión en potencias de  $\alpha'$  en un espacio AdS. Dicha expansión toma la forma esquemática:

$$\mathcal{L} = a_1 \alpha' \mathcal{R} + a_2 \alpha'^2 \mathcal{R}^2 + a_3 \alpha'^3 \mathcal{R}^3 + \dots \quad (3.40)$$

Puesto que en AdS

$$\mathcal{R} \sim \frac{1}{L^2} = \frac{1}{\lambda^{1/2} \alpha'} \quad (3.41)$$

(3.40) resulta

$$\mathcal{L} = \frac{a_1}{\lambda^{1/2}} + \frac{a_2}{\lambda} + \frac{a_3}{\lambda^{3/2}} + \dots, \quad (3.42)$$

por lo tanto, observamos que si  $\lambda \ll 1$  la gravedad esta altamente acoplada y por el contrario, si  $\lambda \gg 1$  la gravedad está débilmente acoplada.

### 3.5. Teoría de campos con potencial químico finito

Además de la temperatura, podemos introducir otros parámetros. Si la teoría de campos posee corrientes conservadas, podemos considerar potenciales químicos  $\mu^a$  para las correspondientes cargas  $N_a$ . El potencial químico mide la cantidad de energía necesaria para introducir de partículas al sistema. A temperatura finita existen fluctuaciones en la energía del sistema, a potencial químico finito se permite fluctuaciones de sus correspondientes cargas. Así, el sistema puede ser encontrado en diferentes estados y su matriz densidad esta dada por

$$\rho = \frac{e^{-\beta(H - N_a \mu^a)}}{Z_{granc}}, \quad \text{con} \quad Z_{granc} = \text{Tr} e^{-\beta(H - N_a \mu^a)} \quad (3.43)$$

el potencial gran canónico se define como

$$\Omega(T, V, \mu^a) = \langle E \rangle - TS - \mu^a \langle N \rangle = -T \ln Z_{granc}, \quad (3.44)$$

se relaciona con la energía libre de Gibbs mediante una transformación de Legendre  $\Omega = F - \mu^a \langle N^a \rangle$ .

Ahora vamos a discutir como introducir potencial químico en el contexto de la dualidad gauge/gravedad. Las cargas  $N_a$  pueden ser vistas como la integral de la componente temporal de las correspondientes corrientes

conservadas  $J_a^\mu$ . Esas corrientes pueden ser acopladas a campos de gauge  $A_\mu^a$ . Luego, el hamiltoniano del sistema cambia de  $H \rightarrow H - \int d^3x J_a^\mu A_\mu^a$ . Imponiendo  $A_t^a|_{\text{borde}} = \mu^a$ , obtenemos el cambio en el hamiltoniano deseado  $H \rightarrow H - \mu^a A_a$ . De esta manera describimos un sistema a potencial químico finito mediante una componente temporal no nula de un campo de gauge que vive en el *bulk* [81].

Esta formulación es adecuada para el contexto de la dualidad gauge/gravedad. La corriente  $J_a^\mu$  cuya componente temporal es la densidad de carga es dual a un campo de gauge  $A_\mu^a$  que vive del lado de gravedad. Al realizar una expansión de esta corriente, podemos entender el término dominante como el potencial químico, mientras que el término subdominante describe el valor de expectación de vacío de esa corriente, que es la densidad de carga.

Una de las consecuencias es que la presencia de un potencial químico para una simetría global  $U(1)$  a temperatura finita sobre la QFT es descripta del lado de gravedad por un agujero negro cargado electricamente [81].

### 3.6. Lazos de Wilson

Las funciones de correlación no son los únicos operadores no locales que se pueden calcular utilizando la dualidad AdS/CFT, existen otro tipo muy importante son los llamados Lazo de Wilson. Los valores de expectación de los lazos de Wilson están definidos a partir de la integral de contorno alrededor de una curva cerrada  $\mathcal{C}$  del campo de gauge de la teoría, como:

$$W(\mathcal{C}) = \frac{1}{N_c} \text{tr} \left( \mathcal{P} e^{\oint_{\mathcal{C}} A_\mu dx^\mu} \right), \quad (3.45)$$

donde  $\mathcal{P}$  significa producto ordenado a lo largo de la trayectoria,  $N_c$  el número de colores de la teoría y  $A_\mu$  es el campo de gauge no abeliano y la traza se calcula en la representación fundamental de  $SU(N_c)$ .

Los lazos Wilson proveen información útil acerca del comportamiento no perturbativo de las teorías de gauge, y tienen aplicación en la descripción de muchos fenómenos físicos tales como confinamientos, transiciones de fase, cálculo de potencial quark-antiquark, etc. Pero en general, son difíciles de calcular. Aquí, nosotros estamos interesados en describir como se calcula el valor de expectación de los lazos de Wilson en teorías de gauge fuertemente acopladas usando la descripción gravitatoria que nos provee la correspondencia AdS/CFT.

En [82] y [83] se postuló que el valor de expectación de un lazo de Wilson se puede calcular a partir de la función de partición de la cuerda con una hoja de mundo  $\mathcal{M}$  que se extiende sobre el interior del espacio y finaliza en la trayectoria cerrada  $\mathcal{C}$  sobre la frontera según

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle = \int \mathcal{D}\mathcal{M} e^{-S_{NG}(\mathcal{M})}, \quad (3.46)$$

donde se está integrando sobre todas las superficies, no-equivalentes, tales que su frontera sea  $\mathcal{C} = \partial\mathcal{M}$ , en el borde del espacio-tiempo curvo.  $S_{NG}(\mathcal{M})$  corresponde a la acción de la cuerda.

### Acción de Nambu-Goto

Para definir la acción que describe la dinámica de una cuerda, se generalizó el concepto de línea de mundo (2.1), al de hoja de mundo, que es la superficie que genera una cuerda cuando se desplaza en el espacio-tiempo. En consecuencia, es natural proponer para la acción de una cuerda el área de la superficie  $\mathcal{M}$  subtendida por la misma en el espacio-tiempo. Tal acción se conoce como acción de Nambu-Goto

$$\begin{aligned} S_{NG}(\mathcal{M}) &= -T \int_{\mathcal{M}} dA \\ &= -T \int d\sigma d\tau \sqrt{-\det h_{ab}}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

aquí  $T$  representa la tensión de la cuerda<sup>1</sup>,  $(\tau, \sigma)$  son las coordenadas con las que se parametriza la hoja de mundo  $\mathcal{M}$ , y  $h_{ab}$  es la métrica inducida por el espacio sobre la hoja, dada por

<sup>1</sup>Físicamente se corresponde con la tensión de la cuerda  $T = \text{masa}/\text{longitud}$ . La tensión se suele también reescribir como  $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$  y  $\alpha' = l_s^2$  donde  $l_s$  es la escala de longitud de la cuerda identificada originalmente con la longitud de Planck  $l_P \sim 10^{-33} \text{cm}$ , si bien esto es incorrecto a nivel de cuerdas, ya que,  $l_P^4 = g_s l_s^4$ .

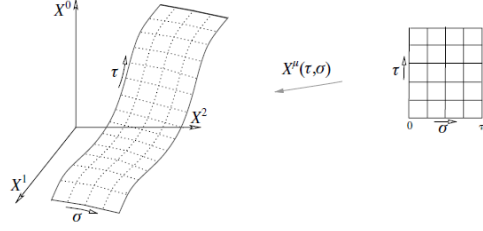


Figura 3.3: Hoja de mundo de una cuerda. La función  $X^\mu(\tau, \sigma)$  embebe la hoja de mundo  $\mathcal{M}$ , parametrizada por  $(\tau, \sigma)$ , dentro del espacio-tiempo coordenatizado por  $X^\mu$ .

$$h_{ab} = g_{\mu\nu}(X) \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} \quad (3.48)$$

donde denotamos

$$\xi^a = (\tau, \sigma), \quad a = 0, 1. \quad (3.49)$$

Para entender el origen de esta métrica inducida escribimos

$$dX^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} d\xi^a \quad (3.50)$$

de donde obtenemos que el elemento de arco sobre la hoja de mundo de la cuerda satisface

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(X) dX^\mu dX^\nu = h_{ab}(X(\xi)) d\xi^a d\xi^b \quad (3.51)$$

lo que permite identificar la métrica inducida  $h_{ab}$  con la expresión (3.48).

Es importante señalar que al considerar cuerdas en  $AdS$ ,  $g_{\mu\nu}(X)$  en (3.48) tiene un factor  $g_{\mu\nu}(X) = L^2 g_{\mu\nu}^{(AdS)}(X)$ <sup>2</sup>. Este factor  $L^2$  proveniente de la métrica se combina con la tensión de la cuerda de manera que

$$\begin{aligned} S_{NG} &= \frac{L^2}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-\det h_{ab}^{(AdS)}} \\ &= \sqrt{\lambda} \int d^2\sigma \sqrt{-\det h_{ab}^{(AdS)}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

mostrando que si  $\lambda \gg 1$  podemos hacer un desarrollo semiclásico y describir los lazos de Wilson en términos de superficies clásicas en  $AdS$

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle = e^{-S_{NG}^{Clásica}(\mathcal{M})} \quad (3.54)$$

---

2

$$h_{ab} = g_{\mu\nu}(X) \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} = L^2 g_{\mu\nu}^{(AdS)}(X) \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} = L^2 h_{ab}^{(AdS)} \quad (3.52)$$



## Capítulo 4

# Campo escalar y Herramientas de cálculo

En este capítulo estudiaremos un campo escalar masivo en el contexto de la dualidad AdS/CFT. Primero calcularemos la función de dos puntos para el operador  $\hat{\mathcal{O}}$  dual al campo escalar en  $AdS_{d+1}$  usando la prescripción de Gusber-klebanov-Polyakov y Witten (GKPW) para luego centrarnos en la aproximación geodésica y veremos la relación con el cálculo anterior.

### 4.1. La dualidad campos/operator para un campo escalar

#### 4.1.1. Función de un punto en presencia de fuentes externas

Recordemos que a cada operador  $\hat{\mathcal{O}}(\mathbf{x})$  en la QFT le corresponde un campo  $\phi(\mathbf{x})$  en el *bulk*. Mostraremos a continuación la relación más básica de AdS/CFT:  $\Delta \leftrightarrow m^2$  donde  $\Delta$  es el peso conforme de  $\hat{\mathcal{O}}$  en la QFT y  $m^2$  la masa del campo escalar  $\phi$  en el *bulk*.

Es interesante calcular en QFT la función de un punto de un operador  $\hat{\mathcal{O}}$  en presencia de la fuente  $\varphi$ . La prescripción para este cálculo es

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle_\varphi = \frac{\delta S_{grav}^{ren}[\phi]}{\delta \varphi(x)}. \quad (4.1)$$

Tomando en cuenta la relación que existe entre el campo del *bulk*  $\phi$  y su condición de contorno  $\varphi$  en (3.33), obtenemos

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle_\varphi = \lim_{z \rightarrow 0} z^\Delta \frac{\delta S_{grav}^{ren}[\phi]}{\delta \phi(x)}. \quad (4.2)$$

A partir de la acción de gravedad

$$S_{grav} = \int dz d^d x \mathcal{L}[\phi, \partial\phi], \quad (4.3)$$

variando respecto a los campos tenemos

$$\delta S_{grav} = \int dz d^d x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right). \quad (4.4)$$

Como es usual, integrando por partes y usando que  $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(\delta \phi)$ , obtenemos

$$\delta S_{grav} = \int dz d^d x \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi \right\}. \quad (4.5)$$

El primer término es cero al evaluar sobre las ecuaciones de movimiento para el campo. En coordenadas de Poincare (3.12) el borde está en  $z = \epsilon \rightarrow 0$ , escribimos

$$\delta S_{grav}^{on-shell} = \int_\epsilon^\infty \int d^d x \partial_z \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_z \phi)} \delta \phi \right) = - \int_{\partial M} d^d x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_z \phi)} \delta \phi |_{z=\epsilon}. \quad (4.6)$$

La contribución de  $z = \infty$  es nula en signatura Euclídea si las configuraciones de campo sobre las que fluctuamos, son regulares. Esta derivación muestra que la acción estándar para un campo escalar determina un problema "bien definido" para la condición de contorno Dirichlet para el campo  $\phi$ :  $\delta\phi|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ .

Por otro lado, resulta natural definir

$$\Pi = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_z\phi)}, \quad (4.7)$$

el momento canónico de  $\phi$  pensando a  $z$  como a un tiempo. De esta manera, (4.6) puede ser escrita como:

$$\delta S_{grav}^{on-shell} = \int_{\partial M} d^d x \Pi(\epsilon, x) \delta\phi(\epsilon, x). \quad (4.8)$$

Concluimos que,

$$\frac{\delta S_{grav}^{on-shell}}{\delta\phi(\epsilon, x)} = \Pi(\epsilon, x) = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_z\phi)}. \quad (4.9)$$

En general la acción renormalizada contiene términos adicionales que la regularizan

$$S^{ren} = S_{grav}^{on-shell} + S_{ct}. \quad (4.10)$$

donde  $S_{st}$  es un contratérmino, definido en el borde  $z = \epsilon$ . Luego,

$$\Pi^{ren}(z, x) = \frac{\delta S^{ren}}{\delta\phi(z, x)}. \quad (4.11)$$

Por lo tanto, a partir de la definición de  $\Pi^{ren}$  en (4.11) y de (4.2), obtenemos la función de un punto de  $\hat{\mathcal{O}}$  en presencia de una fuente externa  $\varphi$  como

$$\langle\mathcal{O}(x)\rangle_\varphi = \lim_{z \rightarrow 0} z^{\Delta-} \Pi^{ren}(z, x). \quad (4.12)$$

Es importante señalar que este resultado es no perturbativo.

## Función de dos puntos

La representación a partir de la integral de camino de la teoría de campos de la función de un punto con una fuente es

$$\langle\mathcal{O}(x)\rangle_\varphi = \int [\mathcal{D}\psi] \mathcal{O}(x) e^{S_E[\psi] + \int d^d y \varphi(y) \mathcal{O}(y)}, \quad (4.13)$$

donde  $\psi$  denota los campos de la QFT. Vamos a expandir el exponente de esta expresión en una serie de potencias de la fuente  $\varphi$  y manteniendo los términos a primer orden nos queda

$$\langle\mathcal{O}(x)\rangle_\varphi = \langle\mathcal{O}(x)\rangle_{\varphi=0} + \int d^d y \langle\mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y)\rangle \varphi(y) + \dots \quad (4.14)$$

Definiendo la función de dos puntos euclídea  $G_E(x - y) = \langle\mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y)\rangle$ , la ecuación (4.14) puede escribirse como

$$\langle\mathcal{O}(x)\rangle_\varphi = \langle\mathcal{O}(x)\rangle_{\varphi=0} + \int d^d y G_E(x - y) \varphi(y) + \dots \quad (4.15)$$

Consideremos observables tales que  $\langle\mathcal{O}(x)\rangle_{\varphi=0} = 0$ , luego  $\langle\mathcal{O}(x)\rangle_\varphi$  mide físicamente a la respuesta frente a el acoplamiento con una fuente externa. En estas situaciones, la respuesta lineal del sistema despreciando los términos de orden superior en  $\varphi$  en (4.15) frente a una perturbación externa es

$$\langle\mathcal{O}(x)\rangle_\varphi = \int d^d y G_E(x - y) \varphi(y). \quad (4.16)$$

En el espacio de momentos esta expresión toma la forma

$$\langle \mathcal{O}(k) \rangle_\varphi = G_E(k) \varphi(k) \quad \rightarrow \quad G_E(k) = \frac{\langle \mathcal{O}(k) \rangle_\varphi}{\varphi(k)}. \quad (4.17)$$

En el contexto de la correspondencia AdS/CFT, dado que  $\varphi = z^{-\Delta_-} \phi(z, x)$  con  $z \rightarrow 0$ , tenemos la siguiente fórmula de la función de dos puntos en el espacio de momentos

$$G_E(k) = \lim_{z \rightarrow 0} z^{2(d-\Delta_+)} \frac{\Pi^{ren}(z, k)}{\phi(z, k)}. \quad (4.18)$$

#### 4.1.2. Función de dos puntos para el campo escalar en $AdS_{d+1}$

A modo introductorio vamos a calcular la función de dos puntos para el operador dual  $\hat{\mathcal{O}}$  asociado a un campo escalar masivo en un espacio AdS puro [50, 51, 84, 63, 85].

Tomemos un campo escalar  $\phi(z, x^\mu)$  libre, su acción en un espacio curvo AdS (3.12) con signatura Euclídea se escribe

$$S[\phi] = -\frac{\kappa}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} \{g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2\}. \quad (4.19)$$

Variando la acción (4.19) obtenemos

$$(-\square + m^2)\phi = 0, \quad (4.20)$$

esto es la ecuación de Klein-Gordon, donde  $\square = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$ . Nuestra intención ahora es resolver la ecuación de movimiento para  $\phi$ , con condición de borde  $\phi(0, \vec{x}) = \phi_0(\vec{x})$ . En consecuencia, descomponiendo al campo escalar en modos de Fourier

$$\phi(z, x^\mu) = e^{ik_\mu x^\mu} f_k(z), \quad k_\mu x^\mu = -\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (4.21)$$

y usando el hecho de que la métrica solo depende de  $z$ , la ecuación para la función radial  $f_k(z)$  toma la forma

$$0 = \frac{1}{L^2} [z^2 k^2 - z^{d+1} \partial_z (z^{-d+1} \partial_z) + m^2 L^2] f_k(z). \quad (4.22)$$

Cerca del borde, (es decir  $z \rightarrow 0$ ), proponemos una solución en serie de potencias  $f_k = z^\Delta$ , y obtenemos:

$$0 = z^2 k^2 - \Delta(\Delta - d) + m^2 L^2 z^\Delta, \quad (4.23)$$

en el límite  $z \rightarrow 0$  la ecuación indicial resulta

$$\Delta(\Delta - d) = m^2 L^2, \quad \rightarrow \quad \Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (mL)^2}. \quad (4.24)$$

Luego las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial (4.19) cerca del borde son

$$f_k(z) = z^{\Delta_-} A(k)(1 + O(z)) + z^{\Delta_+} B(k)(1 + O(z)), \quad (4.25)$$

donde  $A(x)$  y  $B(x)$  son funciones arbitrarias. Transformando Fourier nos queda

$$\phi(z, x) \approx z^{\Delta_-} A(x) + z^{\Delta_+} B(x) \quad z \rightarrow 0. \quad (4.26)$$

El término  $z^{\Delta_-}$  es el que domina cuando  $z \rightarrow 0$ . Debido al carácter singular del borde de AdS ( $z = 0$ ) es necesario introducir una regularización en  $z = 0$ . Pondremos  $z = \epsilon$  y tomaremos  $\epsilon \rightarrow 0$  al final de los cálculos. La condición de contorno, despreciando el término subdominante, es

$$\phi(\epsilon, x) = \epsilon^{\Delta_-} A(x). \quad (4.27)$$

La fuente  $\varphi(x)$  de la QFT se identifica con el valor del campo  $\phi(z, x)$  en el borde, una vez que hemos renormalizado apropiadamente las divergencias, extraemos tal divergencia eliminando el factor de (4.27), es decir, identificamos a  $\varphi(x)$  con el valor  $A(x)$ . O equivalentemente definimos

$$\varphi(x) = \lim_{z \rightarrow 0} z^{\Delta_-} \phi(z, x), \quad (4.28)$$

con esta definición  $\varphi(x)$  es finito en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . De forma análoga tenemos que renormalizar el operador  $\hat{\mathcal{O}}$  de la QFT

$$\hat{\mathcal{O}}(\epsilon, x) = \epsilon^{\Delta_+} \hat{\mathcal{O}}^{ren}(x). \quad (4.29)$$

Retomemos la ecuación (4.22). La solución exacta se puede escribir en forma

$$f_k(z) = \alpha_K z^{d/2} K_\nu(kz) + \beta_I z^{d/2} I_\nu(kz) \quad (4.30)$$

donde  $\nu \equiv \Delta_+ - d/2 = \sqrt{(d/2)^2 + m^2 L^2}$ . En el interior de AdS ( $z \rightarrow \infty$ ), las funciones de Bessel tienen el siguiente comportamiento

$$K_\nu(kz) \sim e^{-kz} \quad I_\nu(kz) \sim e^{kz}. \quad (4.31)$$

Las coordenadas de Poincaré no cubren toda la variedad AdS en el caso Lorentziano. De manera que al definir el problema de  $\phi$  en el interior debemos dar condiciones de contorno no solo en  $z = 0$ , sino también en el horizonte  $z \rightarrow \infty$  [86].

### Propagador

Ahora aplicaremos los desarrollos de las secciones anteriores al caso en que la fuente  $\phi$  es un campo escalar, para ello determinemos la función de dos puntos para el campo escalar usando la expresión

$$\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}) \mathcal{O}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{x})} \frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{y})} (-S[\phi])|_{\varphi=0}. \quad (4.32)$$

donde

$$S = -\frac{\kappa}{2} \int dz \, d^d x \, \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2). \quad (4.33)$$

Con el fin de evaluar la acción en la solución, integramos por partes

$$S = -\frac{\kappa}{2} \int dz \, d^d x \partial_\mu [\sqrt{g} \phi g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi] + \frac{\kappa}{2} \int dz \, d^d x \phi \sqrt{g} \left[ \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - m^2 \phi \right], \quad (4.34)$$

y como podemos ver en el caso de un campo libre (Gaussiano) la acción *on-shell* se reduce a un término de borde

$$S^{on-shell} = \frac{\kappa}{2} \int d^d x (\sqrt{g} \phi g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi)|_{z=\epsilon}. \quad (4.35)$$

El momento canónico  $\Pi$  explícitamente toma la forma

$$\Pi = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_z \phi)} = \kappa \sqrt{g} g^{zz} \partial_z \phi. \quad (4.36)$$

En consecuencia la  $S^{on-shell}$  se convierte en

$$S^{on-shell} = \frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x \, \Pi(z, x) \phi(z, x). \quad (4.37)$$

Ahora desarrollemos el campo  $\phi$  y el momento canónico  $\Pi$  en modos de Fourier

$$\phi(z, x^\mu) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik \cdot x} f_k(z), \quad \Pi(z, x^\mu) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik \cdot x} \Pi_k(z). \quad (4.38)$$

Luego, la identidad de Parseval nos permite reescribir  $S^{on-shell}$  como

$$S^{on-shell} = \frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \Pi_{-k}(z = \epsilon) f_k(z = \epsilon). \quad (4.39)$$

Recordemos que la función  $f_k(z)$  cerca de  $z \sim 0$  se comporta como en (4.25). De la definición de  $\Pi$  obtenemos

$$\Pi(z, x) \approx \kappa L^{d-1} ((d - \Delta_+) A(x) z^{-\Delta_+} + \Delta_+ B(x) z^{\Delta_+ - d}), \quad (4.40)$$

donde hemos usado  $\Delta_+ + \Delta_- = d$ . En el espacio de momentos toma la forma

$$\Pi_{-k} \approx \kappa L^{d-1} [(d - \Delta_+) A(-k) z^{-\Delta_+} + \Delta_+ B(-k) z^{\Delta_+ - d}]. \quad (4.41)$$

Vamos a usar estos resultados para la  $S^{on-shell}$ . Manteniendo solo los términos dominantes en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , usando (4.25) y (4.41) obtenemos

$$S^{on-shell} = \frac{\kappa}{2} L^{d-1} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (\epsilon^{-2\nu} (d - \Delta_+) A(-k) A(k) + d A(-k) B(k)). \quad (4.42)$$

El primer término de (4.42) diverge, el contratérmino que cancela la divergencia tiene la forma [?]

$$\begin{aligned} S_{ct} &= -\frac{\kappa}{2} \left( \frac{d - \Delta_+}{L} \right) \int_{\partial AdS} d^d x \sqrt{\gamma} \phi^2 \\ &= -\frac{\kappa}{2} (d - \Delta_+) L^{d-1} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [\epsilon^{-2\nu} A(-k) A(k) + 2 A(-k) B(k)]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

La acción renormalizada  $S^{ren} = S^{on-shell} + S_{ct}$  puede ser obtenida utilizando (4.42) y (??). Resulta

$$S^{ren} = \frac{\kappa}{2} L^{d-1} (2\Delta_+ - d) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} A(-k) B(k). \quad (4.44)$$

Con el fin de calcular la función de un punto a partir de  $S^{ren}$ , calculamos las derivadas funcionales respecto  $\varphi(x)$  (recalcamos que  $\varphi = A(x)$ ). Es importante mencionar que las condiciones de regularidad en  $z = \infty$  (IR profundo) relacionan  $B \leftrightarrow A$  y este hecho se relaciona con la existencia de una sola solución regular en el interior  $K_\nu(kz)$  en (4.30).

Para determinar completamente  $\phi$  debemos imponer regularidad en lo más profundo del IR, esto es  $z \rightarrow \infty$ . Al orden lineal en el que estamos trabajando tenemos que  $B$  es proporcional a la fuente  $A = \varphi$  y lo denotamos como

$$\chi = \frac{B}{A}. \quad (4.45)$$

podemos escribir la acción renormalizada (4.44) como

$$S^{ren} = \frac{\kappa}{2} L^{d-1} (2\Delta - d) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \chi(k) \varphi(k) \varphi(-k) \quad (4.46)$$

donde hemos usado  $\phi(k) = A(k)$ . Puesto que, como la derivada funcional  $\frac{\delta}{\delta \varphi(x)}$  es equivalente a  $(2\pi)^d \frac{\delta}{\delta \varphi(-k)}$  en el espacio de momentos, resulta de (4.2)

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\varphi = (2\pi)^d \frac{\delta S^{ren}}{\delta \varphi(-k)} = \kappa L^{d-1} (2\Delta_+ - d) \chi(k) \varphi(k). \quad (4.47)$$

Alternativamente, de (4.45) y de que  $2\Delta_+ - d = 2\nu$ , podemos escribir (4.47) como

$$\langle \mathcal{O}(k) \rangle_\varphi = 2\kappa \nu L^{d-1} B(k). \quad (4.48)$$

Así, la contribución subdominante cerca del borde  $B(k)$ , determina el valor de expectación de vacío del operador. Resumiendo, la función de dos puntos  $G_E(k)$  la podemos obtener dividiendo la respuesta  $B$  por la fuente  $A$  (ver (4.17))

$$G_E(k) = 2\nu \kappa L^{d-1} \frac{B(k)}{A(k)}. \quad (4.49)$$

Para encontrar la relación  $A \leftrightarrow B$  reescribimos (4.30) en otra base de funciones de Bessel. Esto es, en términos de  $I_{\pm\nu}(kx)$ ,

$$f_k(z) = I_{+\nu}((z, k) \tilde{A}(k) + I_{-\nu}(z, k) \tilde{B}(x), \quad (4.50)$$

donde  $I_{+\nu}(kx)$  y  $I_{-\nu}(kx)$  son dos soluciones independientes de la ecuación (4.22) y que para  $z \rightarrow 0$  presentan los comportamientos

$$I_{\pm\nu}(z) \approx \frac{1}{\Gamma(1 \pm \nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\nu}, \quad (z \rightarrow 0). \quad (4.51)$$

Normalizando apropiadamente tenemos de (4.50)

$$f_k(z) = z^{d/2} [\Gamma(1 - \nu) \left(\frac{k}{2}\right)^\nu A(k) I_{-\nu}(kz) + \Gamma(1 + \nu) \left(\frac{k}{2}\right)^{-\nu} B(k) I_\nu(kz)]. \quad (4.52)$$

Imponiendo que  $f_k(z)$  sea regular cuando  $z \rightarrow \infty$ . Obtenemos una relación entre los coeficientes  $A(k)$  y  $B(k)$ . Puesto que cuando  $z \rightarrow \infty$ , las funciones  $I_{\pm\nu}(z)$  adoptan la forma

$$I_{\pm\nu}(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad (z \rightarrow \infty). \quad (4.53)$$

Conseguimos para grandes  $z$

$$f_k(z) \approx \frac{z^{d/2} e^{kz}}{\sqrt{2\pi k z}} [\Gamma(1 - \nu) \left(\frac{k}{2}\right)^\nu A(k) + \Gamma(1 + \nu) \left(\frac{k}{2}\right)^{-\nu} B(k)], \quad (4.54)$$

que resulta divergente cuando  $z \rightarrow \infty$ . En consecuencia, pedimos que

$$\frac{B(k)}{A(k)} = -\frac{\Gamma(1 - \nu)}{\Gamma(1 + \nu)} \left(\frac{k}{2}\right)^{2\nu} = \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{k}{2}\right)^{2\nu}. \quad (4.55)$$

Usando estos resultados, podemos calcular la función de dos puntos euclídea a partir de (4.49) obteniendo

$$G_E(k) = 2\nu\kappa L^{d-1} \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{k}{2}\right)^{2\nu}. \quad (4.56)$$

En un espacio de Fourier

$$G_E(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} G_E(k), \quad (4.57)$$

y usando la formula (entendida en el sentido de las distribuciones)

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik(x-y)} k^\alpha = \frac{2^\alpha}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{d+\alpha}{2})}{\Gamma(-\alpha/2)} \frac{1}{|x-y|^{d+\alpha}}, \quad (4.58)$$

obtenemos en el espacio de las coordenadas a la función de dos puntos de un operador de dimensión de escala  $\Delta_+$

$$\langle \hat{\mathcal{O}}(\mathbf{x}) \hat{\mathcal{O}}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{\Gamma(\Delta_+)(2\Delta_+ - d)}{\pi^{d/2} \Gamma(\Delta_+ - \frac{d}{2})} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2\Delta_+}}, \quad \text{para } \alpha \in \mathbb{R} - \{2n\} \text{ con } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.59)$$

### 4.1.3. Propagador en la aproximación geodésica

Es un resultado conocido que el propagador en mecánica cuántica es

$$G(\vec{x}_f, t_f, \vec{x}_i, t_i) = \int_{(\vec{x}_i, t_i)}^{(\vec{x}_f, t_f)} \mathcal{D}\vec{x} e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (4.60)$$

donde la suma está realizada sobre todas las trayectorias que conectan el punto inicial con el final. Una generalización natural en un espacio curvo a este resultado, consiste en reemplazar la métrica plana por la de un espacio curvo.

En consecuencia, en el límite semiclásico, vamos calcular  $\int \mathcal{DP} e^{\frac{i}{\hbar} S} \sim \sum_{\text{geodesicas}} e^{-S(\vec{r}_{\text{clasica}})}$  para el espacio  $AdS_{d+1}$ . Donde realizando en (3.12) el cambio de coordenadas  $dv = dt - dz$ , obtenemos

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-dv^2 - 2dv dz + d\mathbf{x}_{d-1}^2). \quad (4.61)$$

La acción apropiada para una partícula libre que sigue una trayectoria tipo-espacio en este fondo es

$$S = m \int \frac{L}{z} \sqrt{-\dot{v}^2 - 2\dot{v}\dot{z} + 1} dx. \quad (4.62)$$

Donde hemos parametrizado la trayectoria con la coordenada espacial  $x$  del borde y el símbolo  $' = \frac{d}{dx}$ . De la acción (4.62) se obtienen los momentos

$$p_z = \frac{-\dot{v}}{z\sqrt{-\dot{v}^2 - 2\dot{v}\dot{z} + 1}}, \quad p_v = \frac{-(\dot{v} + \dot{z})}{z\sqrt{-\dot{v}^2 - 2\dot{v}\dot{z} + 1}}. \quad (4.63)$$

Como el lagrangiano no depende explícitamente de  $v$  y tampoco de  $x$ ,  $p_v$  y  $E = \sum_i p_i \dot{q}^i - \mathcal{L}$  son constantes. La constantes  $p_v$  y  $E$  dependerán de las condiciones de contorno. En nuestro caso estamos interesados en curvas espaciales en forma de  $\mathcal{U}$  como se muestra en la figura 6.1, que salen y vuelven al borde de AdS y se encuentran separadas en el borde por una distancia  $D = |\vec{x} - \vec{y}|$ . Parametrizaremos de manera que el máximo valor de  $z = z_*$  se alcanza para  $x = 0$ . Luego  $z(0) = z_*$ ,  $\dot{z}(0) = 0$ ,  $\dot{v}(0) = 0$  y  $z(\pm D/2) = 0$ . En consecuencia, obtenemos

$$E = -\frac{1}{z_*} = -\frac{1}{z\sqrt{-\dot{v}^2 - 2\dot{v}\dot{z} + 1}}, \quad p_v = 0. \quad (4.64)$$

De  $p_v = 0$  obtenemos  $\dot{z} = -\dot{v}$ . Utilizando (4.64) conseguimos que

$$\dot{z}^2 = \frac{z_*^2}{z^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{-z^2 + z_*^2} = x + C \rightarrow z_*^2 = z^2 + (x + C)^2. \quad (4.65)$$

Evaluando  $z(x = 0) = z_*$ , resulta  $C = 0$ . Concluimos que la geodésica es un círculo de radio  $z_*$   $z(x = 0) = z_*$  centrado en un punto del borde ( $z = 0$ ,  $x = x_0$ , en nuestro caso  $x_0 = 0$ ). Ahora estamos en condiciones de evaluar la acción sobre la solución, es decir

$$S = mL \int_{x_i}^{x_f} \frac{z_*}{z^2} dx = 2mL \int_{z_0}^{z_*} \frac{z_*}{z\sqrt{z_*^2 - z^2}} dz = 2mL \ln \frac{2z_*}{z_0} \Rightarrow e^{-S_{\text{clasica}}} = \frac{z_0^{2mL}}{(2z_*)^{2mL}}. \quad (4.66)$$

$z_0$  es un parámetro que regula la geodésica, moviéndola del borde, eventualmente en  $z_0 \rightarrow \infty$ . Debemos ahora relacionar  $z_*$  con el parámetro físico  $D$  que como mencionamos arriba satisface  $z(\pm D/2) = 0$ . De la expansión (4.65) obtenemos

$$\dot{z}^2 = \frac{z_*^2}{z^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-D/2}^0 dx = \int_0^{z_*} \frac{dz z}{\sqrt{z_*^2 - z^2}} \Rightarrow \frac{D}{2} = z_*. \quad (4.67)$$

Usando (4.67) escribimos

$$2z_* = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad (4.68)$$

la acción evaluada en la solución toma la forma

$$e^{-S_{\text{clasica}}} = \frac{z_0^{2mL}}{(2z_*)^{2mL}} = \frac{z_0^{2mL}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2mL}}. \quad (4.69)$$

Como podemos observar (4.59) y (4.69), coinciden en el límite de masa grande del campo escalar que vive en el bulk (esto es,  $\Delta \sim mL$ ). El factor  $z_0^{2m}$  en el numerador corresponde la renormalización de  $\hat{\mathcal{O}}$  mencionada en (4.29). En consecuencia, en este límite, podemos escribir

$$\langle \mathcal{O}^{\text{ren}}(\mathbf{x}) \mathcal{O}^{\text{ren}}(\mathbf{y}) \rangle \approx e^{-S_{\text{clasica}}}, \quad (4.70)$$

donde  $S_{cl\acute{sica}$  corresponde a la acci3n de una partícula libre moviéndose en un espacio curvo. La dimensi3n de escala de  $\hat{\mathcal{O}}$  coincide con la masa del campo, la aproximaci3n es válida para operadores con  $\Delta \gg 1$ .

Según (3.25), si queremos calcular funciones de correlaci3n, necesitamos resolver ecuaciones de movimiento clásicas para los campos  $\phi(\vec{x}, z)$  en el *bulk* que se acoplan en el borde a un operador invariante de gauge  $\mathcal{O}(t, \vec{x})$ , que está sujeto a las condiciones de borde apropiadas estudiadas en [87, 88]. Sin embargo, en la práctica, las ecuaciones de movimiento para fondos que dependen del tiempo sólo en casos excepcionales se pueden resolver. Es por esta raz3n en la presente tesis emplearemos la aproximaci3n geodésica que equivale estudiar operadores  $\hat{\mathcal{O}}$  con dimensi3n de escala grande.

Resumiendo, las funciones de correlaci3n de un operador  $\hat{\mathcal{O}}$  son obtenidas a partir de un campo  $\phi$  dual, calculadas a partir de la derivada funcional de la ecuaci3n (3.25). Esto es útil en el caso en que  $N_c$  y  $\lambda$  son grandes, dado que en este límite la QFT se encuentra altamente acoplada y no admite un tratamiento perturbativo, pero para la teoría gravitatoria dual, en este límite los cálculos puede ser aproximada por la acci3n *on-shell*.

La ecuaci3n (3.25) es un elemento crucial en la correspondencia, ya que establece una relaci3n operativa precisa entre la gravedad y las teorías de gauge por la identificaci3n de sus funciones de la partici3n. También manifiesta el espíritu holográfico de la correspondencia, dado que el borde conforme de AdS puede ser considerado como la variedad donde se define la teoría de campos.

## 4.2. Cálculo del propagador en procesos dependientes del tiempo

### Resumen

Para analizar los procesos de termalizaci3n, en las secciones 4.2.1 y 4.2.2, estudiaremos la funci3n de correlaci3n de dos puntos a diferentes tiempos en el borde, asociada a un operador escalar cargado  $\mathcal{O}_\Delta$ , de peso conforme  $\Delta$ . Descompondremos las coordenadas del *bulk* como  $x = (x^\alpha, z)$ , y el diccionario AdS/CFT relaciona la funci3n de correlaci3n de dos puntos de la QFT  $\langle \mathcal{O}_\Delta(x_1^\alpha) \mathcal{O}_\Delta(x_2^\alpha) \rangle$  con el propagador de Feynman  $G(x_1 | x_2)$  de un campo escalar cargado de masa  $m = \sqrt{\Delta(\Delta - d)}/L$  que se propaga en el *bulk* de  $(d + 1)$  dimensiones como discutimos en secci3n anterior. Existe una descripci3n alternativa para conectar *bulk*  $\leftrightarrow$  QFT dada por [89]. Recordando a la formula escrita en [89, 90, 91], obtendremos

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(x_1^\alpha) \mathcal{O}_\Delta(x_2^\alpha) \rangle = \lim_{z_1, z_2 \rightarrow 0} z_1^{-\Delta_+} z_2^{-\Delta_+} G(x_1^\alpha, z_1 | x_2^\alpha, z_2). \quad (4.71)$$

En esta expresi3n el factor  $z^{-\Delta_+}$  ( $\Delta_+ > 0$ ) compensa el decaimiento de los modos renormalizables de una manera que el resultado es finito. No consideraremos en esta tesis la posibilidad de cuantizaciones alternativas pues  $\Delta \gg 1$ . En el límite donde la masa es grande  $1 \ll mL \approx \Delta_+$ , veremos que el propagador en el *bulk* puede ser aproximado como

$$G(x_1^\alpha, z_1 | x_2^\alpha, z_2) \approx e^{iS_{\text{on-shell}}(x_1^\alpha, z_1 | x_2^\alpha, z_2)}, \quad (4.72)$$

con

$$S_{\text{on-shell}}(x_1^\alpha, z_1 | x_2^\alpha, z_2) = \int d\tau \left( -m \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} + e A_\mu \dot{x}^\mu \right) \Big|_{x^\mu(\tau) = x_{\text{clásica}}^\mu(\tau)}. \quad (4.73)$$

Donde  $S_{\text{on-shell}}$  es la acci3n de una partícula con carga  $e$  evaluada en la trayectoria clásica tipo-tiempo  $x_{\text{clásica}}^\mu(\tau)$  que une los puntos  $(x_1^\alpha, z_1)$  y  $(x_2^\alpha, z_2)$ . Supondremos que el cociente entre la masa y la carga  $q = e/m$  permanece finito en el límite de masa grande ( ver secci3n 4.2.1 para detalles). Luego, a partir de la trayectoria clásica de una partícula cargada que comienza y t rmina su trayectoria en el borde. En el límite en el que la dimensi3n conforme  $\Delta \gg 1$  es grande, las ecuaciones (4.71)-(4.73) nos permitirán calcular la funci3n de correlaci3n de dos puntos (4.71). Es importante notar que el problema presenta trayectorias en regiones clásicamente prohibida. Pospondremos la discusi3n completa de las diferentes formas de acceder a esta regi3n, hasta el capítulo 6. En esta secci3n introduciremos la herramienta/idea básica de continuar analíticamente en el parámetro af n  $\tau = -i\tau_E$  y  $q = -iq_E$ , donde resulta

$$G(x_1^\alpha, z_1 | x_2^\alpha, z_2) = e^{-S_{\text{on-shell}}^E(x_1^\alpha, z_1 | x_2^\alpha, z_2)}, \quad (4.74)$$



con

$$S_{\text{on-shell}}^E(x_1^\alpha, z_1 | x_2^\alpha, z_2) = m \int d\tau_E \left( \sqrt{g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu} + q_E A_\mu x'^\mu \right) \Big|_{x^\mu(\tau_E)=x_{\text{clásica}}^\mu(\tau_E)} . \quad (4.75)$$

(4.71) toma la siguiente forma

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(x_1^\alpha) \mathcal{O}_\Delta(x_2^\alpha) \rangle = \lim_{z_\epsilon \rightarrow 0} z_\epsilon^{-2\Delta} e^{-S_{\text{on-shell}}^E(x_1^\alpha, z_\epsilon | x_2^\alpha, z_\epsilon)} , \quad (4.76)$$

donde  $z_1 = z_2 = z_\epsilon$  pues consideramos que las trayectorias empiezan y terminan en la misma posición radial, la acción euclídea *on-shell*  $S_{\text{on-shell}}^E(x_1^\alpha, z_\epsilon; x_2^\alpha, z_\epsilon)$  está dada en (4.72), y es evaluada sobre trayectorias clásicas comenzando en  $(x_1^\alpha, z_\epsilon)$  y finalizando en  $(x_2^\alpha, z_\epsilon)$ . En el espacio AdS, cualquier geodésica que se acerque al borde tiene una contribución logarítmica divergente  $\sim -\log z$  cuyo origen es la extensión infinita de la geodésica, el factor  $z_+^\Delta$  presente en (4.71) justamente cancela esta contribución. En la sección 4.2.2 mostraremos que la expresión (4.76) para el correlador coincide con la definición holográfica estándar. Esto lo haremos cuando resolvamos la ecuación de Klein-Gordon por medio de la aproximación WKB tomando cociente entre la componente subdominante y dominante del campo escalar en el *bulk* cuando  $z$  se acerca al borde.

#### 4.2.1. Formalismo de línea de mundo y aproximación geodésica

Para analizar el proceso de termalización, necesitamos conocer la función de dos puntos de operadores escalares  $\mathcal{O}_\Delta$  de peso conforme  $\Delta$  con y sin carga. La acción para calcular la función de Green (o propagador) asociada a un campo escalar complejo cargado en el *bulk* de masa  $m$  está dada por

$$S = \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \left[ (D\phi)^2 - \frac{m^2}{2} (\bar{\phi}\phi) \right] \quad (4.77)$$

donde  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$  es la derivada covariante del campo escalar cargado de carga  $e$ . A partir de esta acción se puede obtener el propagador en el *bulk* como

$$G(x_2^\alpha, z_2 | x_1^\alpha, z_1) = \left\langle x_2^\alpha, z_2 \left| \frac{i}{g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - m^2 + i\epsilon} \right| x_1^\alpha, z_1 \right\rangle , \quad (4.78)$$

que será una de las herramientas básicas que utilizaremos para describir los procesos de termalización.

La representación de tiempo propio de Schwinger's consiste en reescribir la inversa del operador (4.78) como en [89, 90, 91, 92, 93, 94, 95]

$$G(x_2^\alpha, z_2 | x_1^\alpha, z_1) = \int_0^\infty dT \left\langle x_2^\alpha, z_2 \left| e^{iT(g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - m^2 + i\epsilon)} \right| x_1^\alpha, z_1 \right\rangle . \quad (4.79)$$

La exponencial dentro del bracket puede ser entendida como el operador evolución para el Hamiltoniano  $H = -g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + m^2$ , de un modelo de mecánica cuántica ficticio con  $T$  como el tiempo propio. Con esto en mente, podemos reformular este modelo de mecánica cuántica en términos de una integral de camino para una partícula masiva

$$G(x_2^\alpha, z_2 | x_1^\alpha, z_1) = \int_0^\infty dT \int_{x(0)=(x_1^\alpha, z_1)}^{x^\mu(T)=(x_2^\alpha, z_2)} \mathcal{D}x(\tau) e^{iS_{\text{1partícula}}[x(\tau)]} , \quad (4.80)$$

con

$$S_{\text{1partícula}}[x(\tau)] = \int_0^T d\tau \left( \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + e A_\mu \dot{x}^\mu - m^2 \right) . \quad (4.81)$$

Aquí la acción para una partícula  $S_{\text{1partícula}}[x(\tau)]$  está escrita en términos del tiempo propio y el tilde ( $\dot{\phantom{x}}$ ) significa derivada con respecto a  $\tau$ . Podemos reescalar  $\tau \rightarrow \tau T$  con el fin de conseguir que  $\tau \in [0, 1]$  y obtenemos

$$G(x_2^\alpha, z_2 | x_1^\alpha, z_1) = \int_0^\infty dT \int_{x^\mu(0)=(x_1^\alpha, z_1)}^{x^\mu(1)=(x_2^\alpha, z_2)} \mathcal{D}x(\tau) e^{iS_{\text{1partícula}}[x(\tau)]} , \quad (4.82)$$

con

$$S_{\text{particula}}[x(\tau)] = \int_0^1 d\tau \left( \frac{1}{4T} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \mathbf{e} A_\mu \dot{x}^\mu - T m^2 \right). \quad (4.83)$$

Esta acción, no es invariante bajo reparametrizaciones de la línea de mundo. Si introducimos un *einbein*  $e_\tau(\tau)$ , podemos interpretar a (4.83) como un fijado de gauge de una acción originalmente invariante frente reparametrizaciones [91], [95]<sup>1</sup>. Por lo tanto escribimos

$$G(x_2^\alpha, z_2 | x_1^\alpha, z_1) = \int \mathcal{D}e_\tau(\tau) \delta(\dot{e}_\tau) \int_{x_{\text{initial}}^\mu = (x_1^\alpha, z_1)}^{x_{\text{final}}^\mu = (x_2^\alpha, z_2)} \mathcal{D}x(\tau) e^{i S_{\text{invariante}}[x(\tau)]}, \quad (4.84)$$

con

$$S_{\text{invariante}}[x(\tau)] = \int_0^1 d\tau \left( \frac{1}{4e_\tau} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \mathbf{e} A_\mu \dot{x}^\mu - e_\tau m^2 \right), \quad (4.85)$$

donde

$$T = \int_0^1 d\tau e_\tau, \quad (4.86)$$

recuperando la acción (4.83) si fijamos el gauge  $e_\tau = T$ . Por otra parte, variando (4.85) con respecto a  $e_\tau$  encontramos

$$e_\tau = \frac{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}}{4m}, \quad (4.87)$$

e insertando esta expresión en (4.85) obtenemos

$$S_{\text{invariante}}[x(\tau)] = \int d\tau \left( -m \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} + \mathbf{e} A_\mu \dot{x}^\mu \right). \quad (4.88)$$

En el límite de masa grande  $\Delta \sim mL \gg 1$ , podemos realizar la aproximación semiclásica de la integral (4.84), obteniendo

$$G(x_2^\alpha, z_2 | x_1^\alpha, z_1) = e^{i S_{\text{on-shell}}(x_1^\alpha, z_1; x_2^\alpha, z_2)}, \quad (4.89)$$

con

$$S_{\text{on-shell}}(x_1^\alpha, z_1 | x_2^\alpha, z_2) = m \int d\tau \left( -\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} + \frac{\mathbf{e}}{m} A_\mu \dot{x}^\mu \right) \Big|_{x^\mu(\tau) = x_{\text{clasica}}^\mu(\tau)}, \quad (4.90)$$

Asumimos que el cociente  $\mathbf{e}/m$  permanece finito en el límite de masa grande y  $x_{\text{clasica}}^\mu(\tau)$  es la trayectoria clásica que comienza en  $(x_1^\alpha, z_1)$  y termina en  $(x_2^\alpha, z_2)$ , recuperando así (4.72)-(4.73).

### 4.2.2. Aproximación WKB

En esta sección queremos probar que la aproximación geodésica (ecuación 4.72) es equivalente a calcular la función de Green a partir de la aproximación WKB, siguiendo [96]<sup>2</sup>: La definición estándar de la función de Green holográfica de un operador escalar  $\hat{\mathcal{O}}$ , dual a un campo escalar  $\Phi$  en el *bulk*, nos permite escribir solución cerca del borde como

$$\Phi = A_+ z^{\Delta_+} + A_- z^{\Delta_-}, \quad (4.91)$$

donde  $A_+$  y  $A_-$  son funciones de  $x^\mu$ , y luego usando la formula

$$G(x_1^\mu; x_2^\mu) = \frac{A_+}{A_-} \quad (4.92)$$

<sup>1</sup>La acción (4.84) es invariante bajo una reparametrización locales  $\delta\tau = \xi(\tau)$  en virtud de  $\delta e_\tau = -\partial_\tau(e_\tau \xi)$ .

<sup>2</sup>Un ejemplo de esto se puede ver en [97]

donde  $A_+, A_-$  son evaluadas en  $x^\mu = x_2^\mu - x_1^\mu$ .

Para obtener la expresión (4.91) podemos usar la aproximación WKB para resolver la ecuación de Klein-Gordon para  $\Phi$ , esto es

$$(g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - m^2) \Phi = 0. \quad (4.93)$$

Luego, desarrollando la ecuación anterior, obtenemos

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu + 2ieA_\mu \nabla^\mu + ie\nabla_\mu A^\mu - e^2 A_\mu A^\mu - m^2) \Phi = 0, \quad (4.94)$$

donde una posible solución es  $\Phi = \exp(iS)$ , para obtener

$$i\nabla_\mu \nabla^\mu S - \nabla_\mu S \nabla^\mu S - (2qA_\mu \nabla^\mu S - iq\nabla_\mu A^\mu) m - (q^2 A_\mu A^\mu + 1)m^2 = 0 \quad (4.95)$$

Donde definimos  $e = mq$ . Luego proponemos el siguiente desarrollo en serie

$$S = mS_1 + S_0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right) \quad (4.96)$$

obteniendo a primer orden

$$g^{\mu\nu} (\partial_\mu S_1 + qA_\mu) (\partial_\nu S_1 + qA_\nu) + 1 = 0 \quad (4.97)$$

$$i\nabla^\mu (\partial_\nu S_1 + qA_\nu) - 2g^{\mu\nu} \partial_\mu S_0 (\partial_\nu S_1 + qA_\nu) = 0. \quad (4.98)$$

Si definimos  $mS_1 = S$  para la primera ecuación, conseguimos

$$g^{\mu\nu} (\partial_\mu S + eA_\mu) (\partial_\nu S + eA_\nu) + m^2 = 0. \quad (4.99)$$

Esta es la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula relativista de spin cero. A partir de la teoría de Hamilton-Jacobi, conocemos que la función  $S$  puede ser identificada con la acción on-shell clásica de una partícula  $S_{\text{on-shell}}$ , y su derivada con el momento  $\partial_\mu S = p_\mu$ , lo que implica que esta ecuación no es más que la relación *on-shell*

$$g^{\mu\nu} (p_\mu + eA_\mu) (p_\nu + eA_\nu) + m^2 = 0 \quad (4.100)$$

En cuanto a la segunda ecuación anterior, escribiendo  $S_0 = -(i/2) \log B^2$  obtenemos

$$\nabla^\mu [B^2 (p_\nu + eA_\nu)] = 0. \quad (4.101)$$

Esta ecuación da la primera corrección cuántica, y puede ser identificada con la ecuación de continuidad para una corriente de probabilidad  $j_\nu = B^2 (p_\nu + eA_\nu)$ .

Para una métrica asintóticamente AdS, cerca del borde  $z = 0$ , existen dos soluciones aproximadas de (4.99)

$$S_\pm \simeq \mathbf{p}_{d-1} \cdot \mathbf{x}_{d-1} - p_v v \pm mL \log z, \quad (4.102)$$

$$B^2 \simeq \frac{c^2}{z}, \quad (4.103)$$

dependiendo de las constantes de integración  $p_v, \mathbf{p}_{d-1}$  y  $c$ . Extendiendo esas soluciones  $S_\pm$  a la región IR del *bulk*, obtenemos la forma general del campo escalar

$$\Phi = \frac{c}{\sqrt{z}} (e^{iS_+} + e^{iS_-}), \quad (4.104)$$

y por lo tanto podemos identificar

$$A_\pm = \lim_{z \rightarrow 0} z^{\mp mL} e^{iS_\pm} B. \quad (4.105)$$

En otras palabras

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(x_1^\alpha) \mathcal{O}_\Delta(x_2^\alpha) \rangle = \frac{A_+}{A_-} = \lim_{z \rightarrow 0} z^{-2mL} e^{i(S_+ - S_-)}. \quad (4.106)$$

Ahora, al notar que las funciones  $S_\pm$  corresponde a la acción *on-shell* clásica integrada a partir del tip de la trayectoria  $z = z_*$  hasta el borde  $z = z_\epsilon$  con el  $\pm$  identificando cada rama de la geodésica, podemos establecer que  $S_+ - S_- = S_{\text{on-shell}}$ . Con esto, recuperamos la fórmula (4.71), donde reemplazamos  $\Delta = mL$  en el límite de  $m$  grande (mirar [98] para una discusión relacionada).

Con el cálculo que realizamos en 4.2.1 y en esta sección, podemos que ver que tomar el límite de masa grande en los campos es equivalente a utilizar la aproximación WKB sobre ellos.

### 4.3. Diccionario

Llegados a esta instancia, estamos en condiciones de confeccionar un diccionario en donde podemos establecer un mapeo uno a uno entre operadores, simetrías o parámetros de la teoría de campos con sus correspondientes cantidades del lado de gravedad. A este diccionario lo confeccionamos en forma de la siguiente tabla:

<b>Borde: gauge (Operador)</b>	<b>Bulk: Gravedad (campo)</b>
Función de partición	Función de partición
Tensor de energía momento $\hat{T}_{\mu\nu}$	Métrica $g_{\mu\nu}$
Corriente global $\hat{J}^\mu$	Campo de gauge $A_\mu$
Operador escalar $\hat{\mathcal{O}}_{bos}$	Campo escalar $\phi$
Operador fermiónico $\hat{\mathcal{O}}_f$	Campo de Dirac $\Psi$
Simetría global	Simetría local
Carga $q_E$ del operador escalar $\hat{\mathcal{O}}$	Campo en el <i>bulk</i> gaugeado, $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + q_E A_\mu\phi$
Dimensión conforme del operador	Masa del campo $m^2$
Fuente para el operador $\hat{\mathcal{O}}$ $S = S_{CFT} + \int d^d x j \hat{\mathcal{O}}_\Delta$	Valor de borde del campo $\phi$
Energía en <i>CFT</i>	Posición radial en el <i>bulk</i> $z \sim 1/E$
Número de colores de la teoría de gauge $N_c$	Radio AdS $L$ en unidades de Planck
VEV del operador	Valor de borde del momento radial del campo
Sistema en equilibrio a una temperatura $T$	Fondo con agujero negro no dependiente del tiempo
Sistema fuera equilibrio (Proceso de termalización)	Fondo con agujero negro que depende del tiempo (Formación de un agujero negro)

Temperatura	Temperatura de Hawking (Agujero negro)
Teoría de campos a temperatura y potencial químico finito	Acción de Einstein-Hilbert-maxwell con solución de RNS.
Potencial químico/densidad de carga	Valor de borde del campo de gauge (Agujero negro RNS)
Energía libre	Acción de Dirac Born Infeld on-shell
Entropía	Área del horizonte del agujero negro
Entropía de entrelazamiento de área $A$	Superficie mínima con borde igual a $A$
Transición de fase	Inestabilidad del agujero negro
Función de correlación de dos puntos	Cociente entre la solución no renormalizable y renormalizable evaluadas en el borde
Función de correlación de dos puntos de un campo escalar	$e^{-S_{on-shell}}$ de la geodésica en el límite de masa grande
Lazos de Wilson a lo largo de una curva $\mathcal{C}$	Función de partición para una cuerda en el <i>bulk</i> finalizando sobre la curva $\mathcal{C}$
Quench ( $S = S_{CFT} + \int d^d x \lambda(t) \hat{\mathcal{O}}_\Delta$ )	Métrica de Vaidya $\hat{M} = \frac{M-M_{in}}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{v}{v_0}\right)\right) + M_{in}$ $\hat{Q} = \frac{Q-Q_{in}}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{v}{v_0}\right)\right) + Q_{in}$

Las entradas al diccionario mencionados en la tabla son totalmente generales, en consecuencia la teoría de campos que vive en el borde del espacio  $AdS_{d+1}$  más general que se puede escribir con nuestras prescripciones esquemáticamente tiene la forma:

$$S = -\frac{1}{4 g_{YM}^2} \int d^d x \text{Tr}[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] + \dots, \quad (4.107)$$

donde  $A_\mu$  es una matriz de  $N_c \times N_c$  correspondiente a un grupo de gauge  $SU(N_c)$  que está en la representación adjunta de dicho grupo.  $F_{\mu\nu}$  tiene la forma

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i [A_\mu, A_\nu]. \quad (4.108)$$

# Capítulo 5

## Fondos

El estudio de sistemas cuánticos fuera del equilibrio es uno de los temas más complicados de la física teórica en la actualidad. Esto se debe a que no se poseen muchas herramientas para poder atacar este tipo de problemas, mucho menos cuando se trata de sistemas fuertemente acoplados, como el plasma de quarks y gluones.

Como es bien sabido la correspondencia *AdS/CFT* ha sido de gran ayuda para describir teorías de campos fuertemente acopladas en equilibrio térmico mediante gravedad debilmente acoplada. En los experimentos que se realizan en el RHIC y en el LHC, se desconoce la teoría que explique la termalización de los plasmas generados. Se sabe que estos plasmas inicialmente son sistemas que están altamente fuera del equilibrio, y que luego de un muy corto tiempo llegan a un estado final en equilibrio. Como ya podemos sospechar, luego de estudiar la correspondencia AdS/CFT, veremos en el presente capítulo que esta será útil para describir este tipo de procesos, mediante métricas que dependen del tiempo que además tengan alguna expresión que permita conectar las dos situaciones que se presentan en este proceso. Sin embargo, los resultados obtenidos por los aceleradores en el choque de núcleos ionizados pesados, mencionados hace un momento como el RHIC o el LHC, sugieren que resulta relevante analizar el caso en el que la configuración inicial sea muy diferente de la de equilibrio termodinámico, ya que ésta sería la situación correspondiente a la rápida inyección de energía debida a la colisión entre los nucleos. Mas aún, se ha observado que la termalización es prácticamente instantánea en comparación con resultados perturbativos, del orden de  $0.5 \text{ fm}/c = 1.7 \cdot 10^{-24}$  segundos [99].

En este sentido, originalmente en [100] han estudiado la formación de un agujero negro en espacio AdS usando una perturbación generada por un campo escalar en el *bulk* durante un corto período de tiempo. En nuestro caso, nos inspiramos en los trabajos de [9, 10, 11, 101, 102] donde se estudia la termalización de diferentes observables de la teoría de campos, a partir de una geometría de Vaidya en la que una delgada capa de materia colapsa para formar un agujero negro. En lo que sigue de esta tesis calculamos calculamos funciones de dos puntos y lazos de Wilson.

En esta parte de la tesis, presentaremos, en primer lugar la métrica de Schwarzschild y su estructura causal, luego definiremos a partir de esta las coordenadas de E-F, clave en el desarrollo de la tesis, para después presentar la métrica Schwarzschild-Vaidya, Reissner-Nordstrom-Vaidya y Gauss Bonnet-Reissner-Nordstrom-Vaidya. Una vez finalizado esto, generalizaremos estas métricas a espacios tiempos asintoticamente AdS.

Estos fondos son esenciales para estudiar las distintas pruebas de termalización que veremos en los capítulos 6 y 7, que nos sirvan para analizar la termalización de las teorías de campos correspondientes.

### 5.1. La Métrica de Schwarzschild

Las ecuaciones de Einstein son de caracter no lineal, de modo que la superposición de dos soluciones no es una nueva solución. No es difícil entender la razón física para esta no linealidad: sabemos que el espacio se curva debido a su contenido de masa y energía. Pero la propia curvatura del espacio-tiempo contiene energía, de modo que la misma curvatura es una fuente de curvatura. En otras palabras, la gravedad no sólo se acopla a la energía y la materia, sino también a si misma, lo que resulta en ecuaciones no lineales. Einstein mismo creyó inicialmente que sus ecuaciones eran tan complicadas que nunca se encontraría una solución exacta. Sin embargo, pocos meses después de la publicación de la relatividad general, en 1916, Karl Schwarzschild

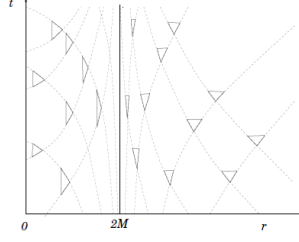


Figura 5.1: Las geodésicas nulas radiales en la solución de Schwarzschild en las coordenadas de Schwarzschild ( $t, r, \theta, \phi$ ). Para  $r \gg 2M$  los conos de luz se comportan como en Minkowski, pero más cerca del radio de Schwarzschild los conos se cierran y degeneran en  $r = 2M$ . Para  $r < 2M$  los conos han cambiado de orientación y apuntan hacia la singularidad en  $r = 0$ . Hacia el interior, estas coordenadas generan la impresión de que no es posible cruzar el radio de Schwarzschild desde el exterior.

(1873 - 1916) halló la solución exacta de un objeto estático con simetría esférica. En los últimos 100 años decenas, si no cientos, de soluciones exactas han sido encontradas. En esta sección discutiremos esta solución de Schwarzschild y su significado físico.

La métrica de Schwarzschild es, tal vez, la más importante solución de las ecuaciones de campo de Einstein(2.34) y representa el espacio-tiempo exterior a por una masa esféricamente simétrica en su exterior. Dicha solución toma la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG_N}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2MG_N}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2, \quad \text{con} \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2, \quad (5.1)$$

en donde la acción a partir de la cual se obtiene dicha solución tiene la forma

$$S_E = -\frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{R}. \quad (5.2)$$

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de (5.2) son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (5.3)$$

### 5.1.1. Estructura Causal

Las geodésicas radiales nulas sirven para visualizar la estructura causal del espacio-tiempo de Schwarzschild. Si tomamos  $ds = 0$  y  $d\Omega = 0$ , se tiene (a continuación fijamos  $G_N = 1$ )

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}, \quad (5.4)$$

lo cual nos da información sobre los conos de luz. Como es de esperar, para valores de  $r$  muy grandes los conos de luz se encuentran a  $45^\circ$  como en el espacio-tiempo de Minkowski (para  $r \rightarrow \infty$ ,  $\frac{dt}{dr} = \pm 1$ ). Por otro lado, al acercarnos a la superficie  $r = 2M$ , los conos de luz tienen una pendiente cada vez más grande (para  $r \rightarrow 2M$ ,  $\frac{dt}{dr} = \pm \infty$ ). Esto es, los conos de luz se cierran al acercarnos a  $r = 2M$ , tal como se muestra en la Figura 5.1.

### 5.1.2. Singularidades

Como se mencionó en la sección anterior, los conos de luz se cierran al acercarnos a la superficie  $r = 2M$ . Una conclusión muy importante es que las coordenadas elegidas para describir la solución de Schwarzschild cubren solamente una porción de la variedad.

Asimismo, el elemento de línea (5.1) se vuelve singular en las coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  en el valor  $r = 2M$ . Este radio se conoce como el radio de Schwarzschild y como se observa de (5.1), este define una hipersuperficie en la cual la métrica diverge. Por esta razón, este punto se conoce como una singularidad de la métrica. Ahora bien, como se mostrará en la siguiente sección, la divergencia de la métrica puede removerse realizando un cambio de coordenadas y por ello a este tipo de singularidades se les denomina removibles o simplemente singularidades de coordenadas.

Por otro lado, el punto  $r = 0$  es también una singularidad de la métrica (5.1) ya que el elemento de línea diverge. Esta singularidad no puede removerse con cambios de coordenadas y por ello se le denomina intrínseca, física o real.

El hecho de no poder remover la singularidad de  $r = 0$  con un cambio de coordenadas se evidencia al calcular escalares contruidos a partir de la curvatura. En el caso de la métrica de Schwarzschild el escalar de Ricci,  $\mathcal{R} = \mathcal{R}^\mu_{\mu}$ , es idénticamente igual a cero y por ello no permite ninguna conclusión. Sin embargo, el escalar de Kretschman (contracción de Riemann con si mismo), resulta ser

$$\mathcal{K} = \mathcal{R}_{\mu\nu\sigma\rho}\mathcal{R}^{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (5.5)$$

Nótese que este escalar no manifiesta ningún problema en  $r = 2M$ , dado cuenta que esta es una singularidad coordenada; mientras que para  $r = 0$  diverge, por lo cual ésta es una singularidad esencial.

Para la descripción de objetos como estrellas, típicamente la solución de Schwarzschild solo es válida para el espacio-tiempo exterior del cuerpo esférico con radio  $R > 2M$ . La métrica en la región interior de la estrella,  $r < R$ , corresponde a una solución de las ecuaciones de campo de Einstein con alguna distribución de materia que se une suavemente con la solución de Schwarzschild en  $r = R$ . Por esta razón, la superficie  $r = 2M$  y la singularidad  $r = 0$  no son consideradas en la descripción usual de estrellas. Sin embargo, cuando se considera el proceso de colapso gravitacional y la masa del objeto se concentra en  $r = 0$ , la superficie  $r = 2M$  aparece como una división de la variedad en dos componentes. La región I, donde  $2M < r < \infty$ , las coordenadas  $t$  y  $r$  tienen un carácter temporal y espacial respectivamente mientras que en la región II, donde  $0 < r < 2M$ , las coordenadas  $t$  y  $r$  invierten su carácter. Esto es una consecuencia del hecho de que para  $r < 2M$ , las componentes  $g_{tt}$  y  $g_{rr}$  de la métrica cambian de signo y las coordenadas  $t$  y  $r$  intercambian los papeles de coordenadas temporal y espacial. Veremos en breve el significado físico de esta propiedad. En el estudio de los agujeros negros, la hipersuperficie  $r = 2M$  posee características muy importantes y definirá el horizonte de eventos de estos objetos.

Lejos del centro, para  $r \gg 2M$ , el segundo término es despreciable frente al primero y los conos de luz se comportan más o menos como en Minkowski, es decir, hacen ángulos de  $45^\circ$  con los ejes  $t$  y  $r$ . Esto es de esperar, ya que la solución de Schwarzschild es asintóticamente plana y se aproxima a la de Minkowski para  $r \rightarrow \infty$ . Sin embargo, más cerca del radio de Schwarzschild, el término logarítmico se vuelve más importante, lo que indica que a los rayos de luz les cuesta más salir del pozo potencial creado por el campo gravitatorio. Concretamente, los conos de luz se cierran cada vez cuanto más nos acercamos al radio de Schwarzschild y en  $r = 2M$  están completamente degenerados (vease Figura 5.1). Dentro del radio de Schwarzschild, tanto las geodésicas entrantes como las salientes apuntan hacia la singularidad y los conos han cambiado de orientación y apuntan hacia la singularidad física en  $r = 0$ .

### 5.1.3. Coordenadas de Eddington-Finkelstein (E-F)

Si se consideran las geodésicas radiales nulas para el espacio-tiempo de Schwarzschild ( $ds = 0$ ,  $d\Omega = 0$ ), éstas quedan definidas por la condición

$$dt^2 = \frac{dr^2}{(1 - \frac{2M}{r})^2} \quad (5.6)$$

Ahora bien, definamos una nueva coordenada radial

$$dr^{*2} = \frac{dr^2}{(1 - \frac{2M}{r})^2}, \quad \text{con} \quad dr^* = \pm \frac{dr}{(1 - \frac{2M}{r})}, \quad (5.7)$$

La nueva coordenada radial  $r^*$  es conocida como coordenada de Regge-Wheeler, y realizando la integración podemos escribir

$$r^* = \pm(r + 2M \ln |r - 2M| + C_0) \quad (5.8)$$

donde  $C_0$  es una constante de integración y los signos indican la dirección de las geodésicas: el signo positivo corresponde a geodésicas salientes y el signo negativo a geodésicas entrantes. Notemos que debido a que la coordenada radial  $r$  toma valores en el rango  $2M < r < \infty$ , la coordenada de Regge-Wheeler tomará valores dentro del rango  $-\infty < r^* < \infty$ .

De (5.6) y (5.7) tenemos que las geodésicas radiales nulas estarán definidas por la relación

$$d(t \pm r^*) = 0. \quad (5.9)$$

Esta ecuación define dos soluciones. Una es la geodésica entrantes (o avanzada)

$$v = t + r^* \quad (5.10)$$

y la otra es una geodésica saliente (o retardada)

$$u = t - r^*. \quad (5.11)$$

### 5.1.4. Coordenadas de E-F entrantes

A partir de la definición de las geodésicas radiales nulas y mediante la ecuación (5.9), es natural reexpresar (5.1) en un nuevo conjunto de coordenadas

$$(t, r, \theta, \phi) \Rightarrow (v, r, \theta, \phi), \quad (5.12)$$

donde tomará valores en el rango  $-\infty < v < \infty$ . Al escribir el elemento de línea para la métrica de Schwarzschild en las coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes ( $v, r, \theta, \phi$ ) se obtiene

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r})dv^2 + 2dr dv + r^2 d\Omega^2 \quad (5.13)$$

Es importante notar que bajo este cambio de coordenadas, la superficie  $r = 2M$  deja de ser singular, como así también el inverso del tensor métrico existe para este punto, ya que el determinante de la métrica no se anula en  $r = 2M$ ,

$$g = -r^4 \sin^2(\theta) \quad (5.14)$$

las nuevas coordenadas ( $v, r, \theta, \phi$ ) permiten disminuir  $r$  a lo largo de una trayectoria radial nula resolviendo el problema del punto  $r = 2M$ . De manera que la región  $r < 2M$  originalmente problemática en coordenadas ( $t, r, \theta, \phi$ ) puede ser descripta mediante (5.13). En el sistema de coordenadas ( $v, r, \theta, \phi$ ) la coordenada radial para tomar valores en todo el rango  $r > 0$ . Ver una descripción de los conos de luz de (5.13) en la figura (5.2).



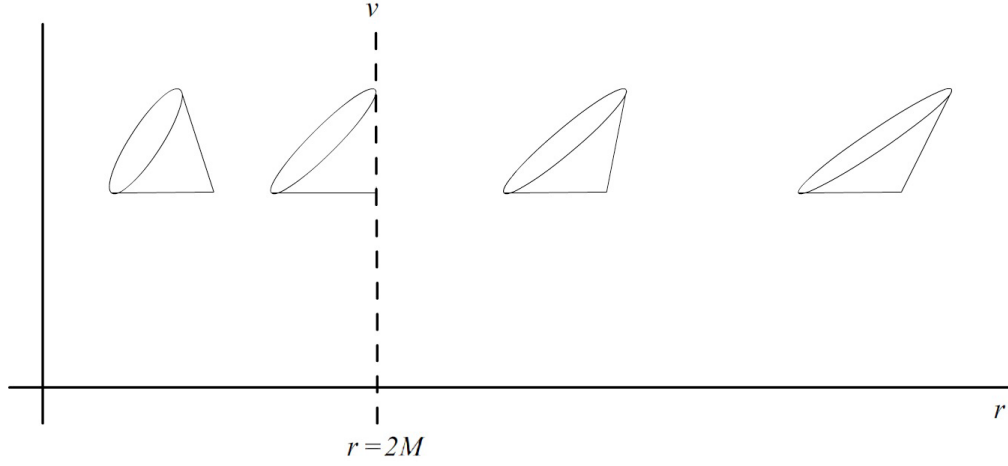


Figura 5.2: Conos de luz lejos y cerca de la superficie  $r = 2M$  en coordenadas Eddington-Finkelstein entrantes.

### 5.1.5. Coordenadas de E-F salientes

La existencia del horizonte de eventos deja ver una posible asimetría temporal en la solución de Schwarzschild ya que trayectorias dirigidas al futuro pueden cruzar la superficie  $r = 2M$ , mientras que las dirigidas al pasado no pueden. Por esta razón utilizaremos de nuevo la definición de las geodésicas radiales nulas (5.9), para definir otra coordenada nula de interés

$$u = t - r^*, \quad (5.15)$$

la cual también toma valores en el rango  $-\infty < u < \infty$ . El elemento de línea para la métrica de Schwarzschild en las coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes ( $u, r, \theta, \phi$ ) es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)du^2 - 2dr du + r^2 d\Omega^2, \quad (5.16)$$

Nuevamente, la superficie  $r = 2M$  no es singular y el inverso del tensor métrico existe para todo  $r$ , el determinante de la métrica solo se anula para  $r = 0$ . Sin embargo, en esta ocasión la región interna  $r < 2M$  resulta no ser la misma que la analizada anteriormente. Para comprobar esto hay que examinar su estructura causal, ver figura (5.3) [103].

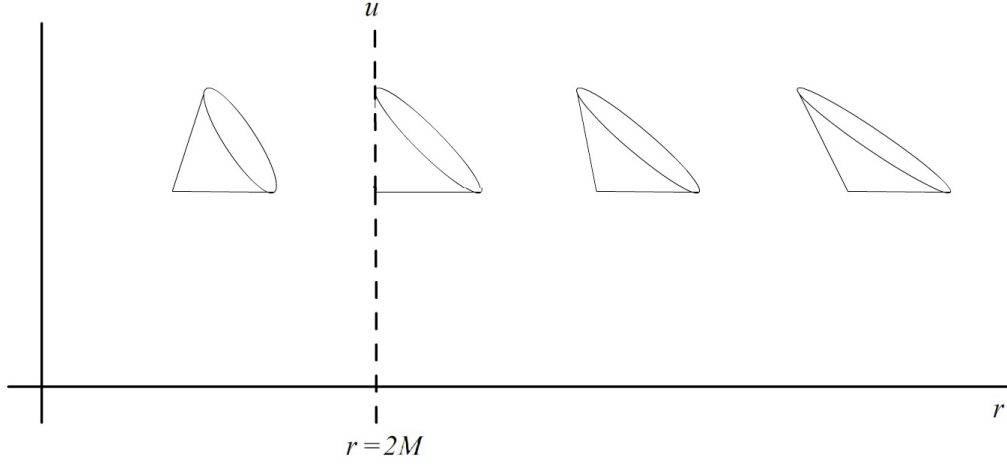


Figura 5.3: Conos de luz lejos y cerca de la superficie  $r = 2M$  en coordenadas Eddington-Finkelstein salientes.

## 5.2. La métrica Schwarzschild-Vaidya

Las métricas de Vaidya son una simple generalización de la métrica de Schwarzschild escritas en coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes o salientes, en donde la masa  $M$  es reemplazada por una función de  $M(v)$  o  $M(u)$ . Las métricas toman la forma

$$ds_{entrantes}^2 = -f dv^2 + 2drdv + r^2 d\Omega_2^2, \quad \text{con} \quad f = 1 - \frac{2 M(v)}{r}, \quad (5.17)$$

$$ds_{salientes}^2 = -f du^2 - 2drdu + r^2 d\Omega_2^2, \quad \text{con} \quad f = 1 - \frac{2 M(u)}{r}. \quad (5.18)$$

Insertándolas en las ecuaciones de Einstein (2.34) obtenemos;

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2T_{\mu\nu}, \quad (5.19)$$

$$T_{vv} = \frac{\dot{M}(v)}{r^2}, \quad (5.20)$$

$$T_{uu} = -\frac{\dot{M}(u)}{r^2}, \quad (5.21)$$

donde  $T_{vv}$  o  $T_{uu}$ , son las únicas componentes no nulas del tensor energía impulso necesarias para soportar a la solución. Aclaramos que el punto sobre  $\dot{M}(v)$  denota derivada con respecto a  $v$ .

### 5.3. La métrica AdS-Vaidya

Como vimos las métricas de Vaidya son una simple generalización de la métrica de Schwarzschild escritas en coordenadas de Eddington-Finkelstein. En nuestro caso, como estamos interesados en la inyección de energía dentro del sistema de QFT, la cual describiremos usando AdS/CFT como una pared de materia que cae hacia el horizonte. Comencemos con la generalización de la métrica de Schwarzschild a espacios  $AdS_{d+1}$

$$ds^2 = L^2 \left( -r^2 f dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 f} + r^2 d\mathbf{x}_{d-1}^2 \right), \quad \text{con} \quad f = 1 - \frac{M}{r^d}, \quad (5.22)$$

es importante señalar que el horizonte es plano y  $L$  es el radio de  $AdS$ .

Las coordenadas  $\vec{x}$  corresponden a las coordenadas espaciales de la frontera,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$ . Si hacemos el cambio de variables usual de  $r = \frac{1}{z}$ , (5.22) obtenemos

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left( -f dt^2 + \frac{dz^2}{f} + d\mathbf{x}_{d-1}^2 \right), \quad \text{con} \quad f = 1 - Mz^d. \quad (5.23)$$

Para obtener coordenadas entrantes, buscamos geodésicas radiales nulas y nos aparece la coordenada natural Regge-Wheeler

$$dr^* = \pm \frac{dr}{fr^2}, \quad (5.24)$$

elegimos  $dt = dv - dr^*$ , en consecuencia (5.22) en coordenadas de E-F entrantes considerando  $M \rightarrow M(v)$ , toma la forma

$$ds_{entrantes}^2 = L^2 \left( -r^2 f dv^2 + 2 \frac{dr dv}{r^2} + r^2 d\mathbf{x}_{d-1}^2 \right), \quad \text{con} \quad f = 1 - \frac{M(v)}{r^d}, \quad (5.25)$$

Haciendo  $r = \frac{1}{z}$ , resulta  $dv = dt - \frac{dz}{f}$  y (5.25) nos queda

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-f(z, v) dv^2 - 2 dv dz + d\mathbf{x}_{d-1}^2). \quad (5.26)$$

La frontera asintótica del espacio se encuentra en  $z = 0$ . Las coordenadas  $\vec{x}$  corresponden a las coordenadas espaciales de la frontera,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$ . La función  $M(v)$  va a modelar el cambio en la masa del agujero negro. En particular, si  $M(v) = M_0$  constante, entonces la coordenada  $v$  es simplemente la coordenada de Eddington-Finkelstein usual a partir de la cual podemos definir  $t$ , la coordenada temporal. La métrica (5.26) posee un horizonte de eventos en  $r_h = 1/z_h = M^{1/d}$ .

Por otro lado, si  $M(v) = 0$ , entonces el cambio de variables se convierte en  $dv = dt - dz$  y la métrica resulta

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + dz^2 + d\mathbf{x}_{d-1}^2), \quad (5.27)$$

que es la métrica de un espacio-tiempo  $AdS_{d+1}$  puro. De manera que si elegimos como forma funcional de la masa del agujero negro  $M(v) = M\theta(v)$ , donde  $\theta$  es la función de Heaviside, obtendremos justamente un espacio-tiempo que tiene dos regiones: para  $v < 0$  será  $AdS_{d+1}$  puro mientras que para  $v > 0$  será un agujero negro de tipo Schwarzschild  $AdS_{d+1}$  (que llamaremos por sus siglas en inglés, AdS-BH). En  $v = 0$  se encuentra nuestra capa de materia, que en esta situación tiene espesor nulo. Como en general vamos a estar interesados en realizar análisis numéricos sobre este tipo de geometrías, vamos a elegir una función de masa más suave, una de ellas será,

$$M(v) = \frac{M}{2} \left( 1 + \tanh\left(\frac{v}{v_0}\right) \right) \quad (5.28)$$

donde  $v_0$  va a representar el ancho de la capa masiva. En el límite  $v_0 \rightarrow 0$  recuperamos el caso de la función de Heaviside.

Aunque estamos interesados principalmente en el caso 4-dimensional ( $AdS_5$ ), debido a que queremos modelar el proceso de termalización que se produce cuando chocan núcleos pesados, en esta tesis extenderemos nuestro análisis a otras dimensiones  $d = 4, 5, 6, \dots$  etc. Esto nos permitirá analizar propiedades universales relacionadas con la dimensión.

Estas métricas de Vaidya pueden ser obtenidas acoplando un campo escalar sin masa a gravedad más un término de constante cosmológica. Sin embargo, nosotros trabajaremos sin especificar el origen de la materia que soporta la solución [100], [104]. Es necesario entonces analizar las condiciones de energía.

## Condiciones de energía

Impondremos que se cumplan las condiciones de energía nula [105] para materia que soporte la métrica de Vaidya, esto es

$$T_{\mu\nu}^{\text{Matter}} n^\mu n^\nu \geq 0, \quad (5.29)$$

para cualquier vector nulo  $n^\mu$ .

Cuando (5.22) es independiente de  $v$ , la solución de las ecuaciones de Einstein requiera  $T_{\mu\nu} = 0$ . En [16], [106] muestran que al hacer  $M \rightarrow M(v)$ , la única componente no nula del Tensor de energía momento que sobrevive es la  $T_{vv}$ . En  $AdS$  toma la forma

$$T_{vv}^{(nd)} = (d-1) \frac{1}{2r^{d-1}} \frac{dM}{dv}. \quad (5.30)$$

Por lo tanto la métrica de Vaidya- $AdS_{d+1}$  es solución de las ecuaciones de Einstein cuando es soportada por un tensor de energía-impulso de polvo nulo  $T_{\mu\nu}^{(nd)}$  y constante cosmológica negativa :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(nd)}. \quad (5.31)$$

En la sección 5.4 lo estudiaremos con mayor detalle las condiciones de energía para la métrica de Vaidya generalizada a un agujero negro cargado, llamado usualmente AdS-Reissner-Nordström.

## 5.4. La métrica de Vaidya generalizada a un agujero negro AdS-Reissner-Nordström

La dualidad gauge/gravedad relaciona una teoría cuántica de campos (QFT) fuertemente acoplada en  $d$  dimensiones en un espacio tiempo plano con una teoría de gravedad débilmente acoplada en un espacio tiempo  $d+1$  dimensional asintóticamente Anti-de Sitter.

Recordando el diccionario gauge/gravedad, a temperatura finita estados de la teoría de campos son representados por una geometría con un horizonte del lado del *bulk*. Por otra parte, una simetría global en la *QFT* induce una simetría de gauge del lado de gravedad. Una de las consecuencias es que la presencia de un potencial químico para una simetría global  $U(1)$  a temperatura finita sobre la QFT es descrita del lado de gravedad por un agujero negro cargado eléctricamente [81], [96], [107]. En el ejemplo más sencillo, la transición entre 2 estados de equilibrio a temperatura y potencial químico finito puede ser representado por una métrica Reissner-Nordström que interpola entre dos geometrías con diferentes valores de masa y carga. En esta sección describimos esas geometrías y analizaremos el tensor de energía momento que es necesario para soportar dichas geometrías. Modelamos nuestra geometría dinámica por un colapso de una pared delgada de materia cargada sin masa. Las coordenadas Eddington-Finkelstein resultan entonces naturales para la descripción.

En lo que sigue, tomamos  $d$  como la dimensión de la QFT dual, de ahí nuestra geometría del *bulk* debería tener  $d+1$  dimensiones. Los índices  $\mu, \nu = 0 \dots d$  denotan las coordenadas del *bulk*  $x^\mu = (v, \vec{x}, z)$ .

### 5.4.1. Estado de equilibrio

#### Geometría del *bulk*

En las coordenadas entrantes nulas de Eddington-Finkelstein, la métrica y el campo de gauge correspondiente a un agujero negro de Reissner-Nordström en un espacio-tiempo asintóticamente  $AdS_{d+1}$  (AdS-RN),

toman la siguiente forma

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-f dv^2 - 2dv dz + d\mathbf{x}_{d-1}^2) , \quad (5.32)$$

$$F = L F_{zv} dz \wedge dv \quad (5.33)$$

donde  $f$  y  $F_{zv}$  son funciones de  $z$

$$f = 1 - Mz^d + Q^2 z^{2(d-1)} , \quad (5.34)$$

$$F_{zv} = -\gamma(d-2)Qz^{d-3}, \quad \text{con} \quad \gamma^2 = \frac{d-1}{d-2}. \quad (5.35)$$

Se puede ver fácilmente que si  $Q = 0$ , (5.32) se transforma en (5.26). El fondo estático (5.32)-(5.33) es una solución de vacío de las ecuaciones de Einstein-Hilbert-Maxwell en  $(d+1)$ -dimensiones con constante cosmológica negativa  $\Lambda = -d(d-1)/2(\kappa L)^2$ . La acción toma la forma

$$S_{EHM} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{4} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} . \quad (5.36)$$

Eligiendo  $\kappa^2 = 2$ , las ecuaciones de movimiento resultan

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 2T_{\mu\nu}^{\text{Maxwell}}, \quad (5.37)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (5.38)$$

donde

$$T_{\mu\nu}^{\text{Maxwell}} = F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2. \quad (5.39)$$

La geometría (5.32), asintóticamente AdS con radio  $L$ , tiene el borde localizado en  $z = 0$ , y las constantes  $M$  y  $Q$  corresponden a la masa y carga ADM respectivamente. La métrica (5.32) tiene una singularidad de curvatura en  $z \rightarrow \infty$  y tiene horizontes de eventos cuando  $f = 0$ . Para caracterizar los horizontes notemos que  $f$  tiene 2 extremos, uno en  $z = 0$  con  $f = 1$ , y el segundo en  $z_{\min} = (dM/2(d-1)Q^2)^{1/(d-2)}$  que corresponde un mínimo local ver figura 5.4.

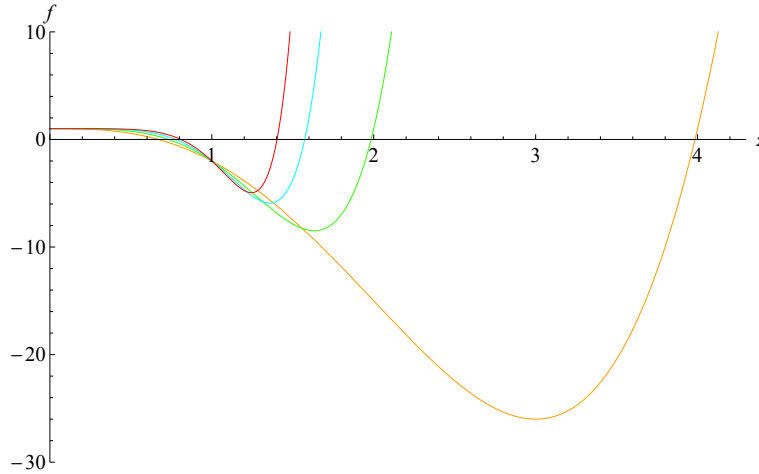


Figura 5.4: En esta figura se muestra la función  $f(z)$  para un valor fijo de la masa ( $M = 4$  en este caso), y varias dimensiones ( $d = 3$  amarillo,  $d = 4$  verde,  $d = 5$  celeste y  $d = 6$  rojo).

La singularidad de curvatura no será visible desde el exterior, siempre y cuando  $f(z_{\min}) \leq 0$ , que implica una relación entre los valores posibles de  $M, Q$

$$\left( \frac{M^{d-1}}{Q^d} \right)^2 \geq \left( \frac{2(d-1)}{d} \right)^d \left( \frac{2(d-1)}{d-2} \right)^{d-2}. \quad (5.40)$$

Siempre que esta desigualdad se satisfaga, tendremos 2 horizontes en  $z = z_{\pm}$  (interior / exterior). Por otro lado, cuando los 2 horizontes coinciden, la configuración es llamada *solución de agujero negro extremal*. Exigiremos la restricción (5.40) en todas nuestras soluciones.

Si bien un agujero negro cargado depende de 2 parámetros arbitrarios  $Q$  y  $M$ , este no es el caso para horizontes planos. La ausencia de una escala para la geometría del horizonte permite fijar uno de los parámetros. En presencia de horizontes, el rescaleo  $(v, \mathbf{x}, z) = z_-(\tilde{v}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{z})$  mapea la posición del horizonte exterior a  $\tilde{z} = 1$ . Definiendo  $\tilde{M} = Mz_-^d$  y  $\tilde{Q} = Qz_-^{d-1}$  encontramos  $\tilde{M} = 1 + \tilde{Q}^2$  resultado [81]

$$f = 1 - (1 + \tilde{Q}^2)\tilde{z}^d + \tilde{Q}^2\tilde{z}^{2(d-1)}, \quad (5.41)$$

$$F_{zv} = -\gamma(d-2)\tilde{Q}\tilde{z}^{d-3}. \quad (5.42)$$

Esta parametrización aparece amenudo en la literatura, satisface automáticamente la restricción (5.40), notemos que  $\tilde{Q}$  puede tener un valor arbitrario. Generalmente (5.41) tiene 2 horizontes: (i) para  $|\tilde{Q}| \leq \sqrt{d/(d-2)}$  uno exterior en  $\tilde{z}_- = 1$  y un interior en  $\tilde{z}_+ > 1$ , (ii) para  $\tilde{Q}^2 = d/(d-2)$  ambos horizontes coinciden en  $\tilde{z}_{\pm} = 1$  y la solución corresponde al caso extremal, y (iii) para  $|\tilde{Q}| > \sqrt{d/(d-2)}$  un horizonte interior en  $\tilde{z}_+ = 1$  y uno exterior en  $\tilde{z}_- < 1$ .

Resumiendo, el *background* (5.41)-(5.42) con

$$|\tilde{Q}| \leq \sqrt{d/(d-2)}, \quad (5.43)$$

parametriza la solución más general de un agujero negro AdSRN con un horizonte exterior ubicado en  $\tilde{z}_- = 1$  y un horizonte interior localizado en  $\tilde{z}_+ \geq 1$ .

## Teoría del borde

Como mencionamos anteriormente, el borde asintótico AdS está localizado en  $z = 0$ , y la geometría estática (5.32)-(5.33) es dual a una QFT en equilibrio caracterizado por un potencial químico  $\mu$  y una temperatura  $T$  [81]. La variable del *bulk*  $v$  se identifica con el tiempo  $t$  de la teoría de gauge dual.

El procedimiento estandar para relacionar los parámetros del borde con los del *bulk* es imponer la regularidad en la solución euclídea luego de realizar la rotación de Wick. Para el caso estático (5.34)-(5.35), la redefinición

$$-idt_E = dv + \frac{dz}{f}, \quad (5.44)$$

transforma la geometría (5.32) a la forma

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left( f dt_E^2 + \frac{dz^2}{f} + d\mathbf{x}_{d-1}^2 \right). \quad (5.45)$$

Es importante señalar, que si la función  $f$  es dependiente de  $v$ , la redefinición (5.44) no es posible, ya que el lado derecho no resulta una diferencial exacta. La métrica (5.45) es regular en  $z = z_-$  si hacemos la identificación periódica  $t_E \equiv t_E + \beta$ , con

$$\beta = \frac{4\pi}{|f_z(z_-)|}, \quad (5.46)$$

el subíndice  $z$  de  $f_z$  denota derivada con respecto a  $z$ . La temperatura de la teoría del borde queda definida como

$$T \equiv \frac{1}{\beta} = \frac{dMz_-^d - 2(d-1)Q^2z_-^{2d-2}}{4\pi z_-}. \quad (5.47)$$

Por otro lado, el potencial químico de la teoría del borde está relacionado con la carga de agujero negro como sigue: podemos elegir al potencial de gauge como

$$A_v = -\gamma Qz^{d-2} + \mu, \quad (5.48)$$

en principio con  $\mu$  arbitrario. Sin embargo, a partir de (5.44) uno tiene  $iA_{t_E} = -\gamma Q z^{d-2} + \mu$ , y dado que el  $t_E$  colapsa suavemente en el horizonte, el campo de gauge deberá satisfacer  $A_{t_E}(z_-) = 0$  para no tener singularidades. Esta condición fija el valor asintótico (solución no-normalizable) del campo de gauge a

$$\mu = \gamma Q z_-^{d-2}. \quad (5.49)$$

Si aumentamos el potencial químico (es decir la carga de agujero negro) para una masa fija, la temperatura del agujero negro disminuye. El valor extremal en (5.40) para la relación  $M/Q$  corresponde a  $T = 0$  y  $\mu \neq 0$ . En el contexto de AdS/CFT uno habla de que el valor de borde del campo de gauge es fuente de un operador de la QFT que se conserva su carga.

### 5.4.2. Estados dependientes del tiempo en el fondo de AdS-Reissner-Nordström

#### Geometría del *bulk*

Para construir una geometría que dependa del tiempo, vamos a promover a las funciones  $f, F_{zv}$  que dependen solo de  $z$  en (5.33), a funciones que dependan de  $z$  y  $v$ . En otras palabras, mantenemos el ansatz para la métrica y el  $F_{\mu\nu}$  (5.32)-(5.33), pero las funciones  $f, F_{zv}$  van a depender de las variables  $z, v$ . Bajo estas condiciones, necesitaremos contribuciones extras en el tensor  $T_{\mu\nu}^{\text{Matter}}$  y la corriente  $j_{\text{Matter}}^\mu$  del lado derecho de (5.37)-(5.38). Estas representaran físicamente una cáscara de materia cargada entrante que da origen a un agujero negro [15].

La contribución adicional al tensor de energía momento viene dada por

$$2T_{\mu\nu}^{\text{Materia}} = \left[ G_{\mu\nu} - \frac{(d-1)d}{2L^2} g_{\mu\nu} \right] - 2T_{\mu\nu}^{\text{Maxwell}}. \quad (5.50)$$

Trabajando sobre las componentes de  $T_{\mu\nu}^{\text{Materia}}$  en términos de las funciones  $f, F_{zv}$  y sus derivadas, encontramos

$$T_{vv}^{\text{Materia}} = \frac{(d-1)}{2z^2} \left( f(zf_z - df + d) - z f_v \right) - \frac{z^2}{2} f F_{zv}^2, \quad (5.51)$$

$$T_{vz}^{\text{Materia}} = \frac{(d-1)}{2z^2} \left( z f_z - df + d \right) - \frac{z^2}{2} F_{zv}^2, \quad (5.52)$$

$$T_{x_i x_j}^{\text{Materia}} = \delta_{ij} \left[ \frac{1}{2} f_{zz} - \frac{(d-1)}{2z^2} \left( 2z f_z - df + d \right) - \frac{z^2}{2} F_{zv}^2 \right]. \quad (5.53)$$

En estas expresiones el subíndice denota derivada parcial,  $f_v \equiv \partial_v f$ .

Un punto crucial a ser verificado consiste, en verificar si la materia entrante que soporta la solución dependiente del tiempo, satisface condiciones de energía apropiadas. En esta tesis consideraremos que la materia que soporta nuestros fondos gravitatorios o bien cumple las condiciones de energía nula en todo el espacio o bien las que satisfacen en las regiones donde trabajamos. Las razones se encuentran discutidas en [16].

En particular, la condición de energía más débil que puede ser impuesta es la llamada condición de energía nula, que declara que para cualquier vector nulo  $n^\mu$ , el tensor de energía impulso debería satisfacer

$$T_{\mu\nu}^{\text{Materia}} n^\mu n^\nu \geq 0, \quad (5.54)$$

en todo el espacio tiempo. Escribiendo un vector genérico como  $n^\mu = (n^v, n^z, n^x, \mathbf{0}_{d-2})$ , (usando la invarianza rotacional en  $\mathbf{x}_{d-1}$  para eliminar las componentes redundantes), la condición de vector nulo resulta

$$g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = \frac{1}{z^2} (-f(n^v)^2 - 2n^v n^z + (n^x)^2) = 0. \quad (5.55)$$

Esta ecuación puede ser resuelta para  $n^z$ . Una solución de esta ecuación es  $n^z$  arbitraria y  $n^v = n^x = 0$  que satisface (5.54) trivialmente. Por otro lado, cuando  $n^v \neq 0$ , tenemos  $n^z = ((n^x)^2 - f(n^v)^2)/2n^v$ , luego reemplazando dentro de la condición de energía encontramos

$$(T_{vv}^{\text{Materia}} - f T_{vz}^{\text{Materia}})(n^v)^2 + (T_{xx}^{\text{Materia}} + T_{vz}^{\text{Materia}})(n^x)^2 \geq 0. \quad (5.56)$$

Para que esta forma cuadrática sea definida positiva para  $n^v$  y  $n^z$  arbitrarios, necesitamos  $(T_{vv}^m - fT_{vz}^m) \geq 0$  y  $(T_{xx}^m + T_{vz}^m) \geq 0$ , usando (5.51)-(5.53) encontramos

$$f_v \leq 0, \quad (5.57)$$

$$zf_{zz} - (d-1)f_z - 2z^3 F_{zv}^2 \geq 0. \quad (5.58)$$

Este conjunto de ecuaciones dependen de  $(z, v)$  y del ansatz en las funciones  $f, F_{zv}$  y determinaran cuales regiones del espacio-tiempo son físicamente admisibles.

Otro requisito importante que debe imponerse a la solución es que cualquier corriente de materia física que sea fuente de los campos de gauge debe ser tipo tiempo o nulo. Definiendo la corriente eléctrica de materia como

$$\begin{aligned} j_{\text{Materia}}^\nu &= \nabla_\mu F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (5.59)$$

encontramos

$$j_{\text{Materia}}^z = \frac{z^4}{L^3} F_{zv,v} \quad (5.60)$$

$$j_{\text{Materia}}^v = \frac{(d-3)z^3}{L^3} F_{zv} - \frac{z^4}{L^3} F_{zv,z}. \quad (5.61)$$

La corriente de materia deberá satisfacer

$$g_{\mu\nu} j_{\text{Materia}}^\mu j_{\text{Materia}}^\nu \leq 0 \quad (5.62)$$

o usando (5.61)

$$\left( \frac{(d-3)}{z} F_{zv} - F_{zv,z} \right) \left( 2F_{zv,v} + f \left( \frac{(d-3)}{z} F_{zv} - F_{zv,z} \right) \right) \geq 0. \quad (5.63)$$

En esta tesis consideraremos los casos donde las funciones  $f, F_{zv}$  mantienen la misma dependencia en  $z$  que en (5.34)-(5.35), pero  $M$  y  $Q$  se convierten en funciones dependientes de  $v$ , es decir,  $\hat{M}(v)$  y  $\hat{Q}(v)$ . La condición (5.40) implica que los ceros de  $f$  (*i.e.* las posiciones de los horizontes  $\hat{z}_\pm$ ) serán dependientes de  $v$ . La forma funcional de  $F_{zv}$  en (5.35) y las ecuaciones (5.60)-(5.61) conducen a que  $j_{\text{Materia}}^\mu = (0, j_{\text{Materia}}^z, \vec{0})$  con  $j_{\text{Materia}}^z$  dada por (5.60). Esta corriente de materia satisface la condición (5.62) como una igualdad, que significa que la fuente de carga para el campo de gauge es tipo-luz. Asimismo, el  $T_{\mu\nu}$  toma la forma de un polvo nulo, y la condición de energía (5.58) se ve satisfecha nuevamente como una igualdad. Es importante resaltar que aunque tengamos un campo eléctrico que dependa del tiempo, su contribución a la ley de Ampere se cancela con la corriente de materia de manera que no conduce a ningún campo magnético. En resumen, generalizando el ansatz a funciones dependientes de  $v$ ,  $\hat{M}(v)$  y  $\hat{Q}(v)$  en  $f$  y  $F_{zv}$ , conduce a una solución de gravedad físicamente razonable siempre y cuando se satisfaga (5.57), que puede ser reescrita como

$$\hat{M}_v \geq 2\hat{Q}\hat{Q}_v z^{d-2}. \quad (5.64)$$

La condición de energía (5.64) fue discutida en [16], [11]. Nos gustaría señalar que (5.64) es equivalente a la condición de aumento de area del horizonte. De hecho, si definimos la posición del horizonte dependiente del tiempo  $\hat{z}_h$  como la solución de  $f(\hat{z}_h, v) = 0$ , derivando respecto de  $v$  obtenemos  $d\hat{z}_h/dv = -f_v/f_z \propto -\hat{M}_v + 2\hat{Q}\hat{Q}_v z^{d-2}$ , por lo tanto la condición  $d\hat{z}_h/dv \leq 0$  es equivalente a (5.64) (ver Fig. 6.3 más adelante). Por otra parte, la condición (5.64) debería ser satisfecha incluso en ausencia de horizontes.

Analizaremos ahora sus consecuencias:

- Cuando la carga  $\hat{Q}$  es cero, (5.64) se transforma en

$$\hat{M}_v \geq 0 \quad (5.65)$$

Por lo tanto, cualquier interpolación entre un AdS puro y una métrica de AdS-Schwarzschild (AdS-BH) demanda un crecimiento monótono en la función de masa. La métrica de Vaidya sin carga usada en [9] estudia la termalización de plasmas altamente acoplados sin potencial químico después de un *quench* que inyecta materia al sistema ( este es un conocido resultado, y lo mencionamos aquí sólo para ser exhaustivos).



- Si la carga permanece constante mientras realizamos el *quench* ( $\hat{Q}_v = 0$ ), la condicion (5.64) se reduce a (5.65): esto es, la función de masa es monótona creciente. Resumiendo la geometría de Vaidya puede ser usada para estudiar procesos de termalización a potencial químico fijo después de la inyección de energía.
- Para una situación donde la carga no es constante, fuera del soporte de  $\hat{Q}_v$ , la condición (5.64) se reduce a (5.65).
- Sin embargo puesto que  $\hat{Q}\hat{Q}_v > 0$ , vemos inmediatamente que (5.64) se viola para  $z$  grande para cualquier valor fijo de  $v$ . Notemos que  $\hat{Q}\hat{Q}_v > 0$  corresponde a un incremento del valor absoluto de la carga, o en otras palabras un fondo que se está *cargando*. Las condiciones de energía nula nos dicen que podremos usar un ansatz de un AdS-Vaidya que se esta cargando para estudiar procesos de termalización de la teoría de campos dual, mientras que nuestras pruebas de termalización se realicen *cerca* del borde. Desde el punto de vista dual, esto significa que la geometría sólo puede ser confiable para describir los grados de libertad UV de la teoría de campos dual. Esas clases de soluciones fueron usadas en [16], [11] para estudiar los procesos de termalización después de un *quench* en la energía y el potencial químico.
- En el caso de un fondo que se está *descargando* ( $\hat{Q}\hat{Q}_v < 0$ ), (5.64) se cumple en todo el espacio tiempo.

En resumen, la métrica con carga dependiente del tiempo se obtiene promoviendo la carga y la masa a funciones dependientes de la coordenada temporal  $v$  en un AdS-RN. Tengamos en cuenta que en las definiciones anteriores, y a lo largo de esta tesis, usamos las palabras “cargando” y “descargando” refiriendonos al incremento o decrecimiento del *valor absoluto* de la carga.

En lo que sigue, utilizamos esas geometrías con el fin de obtener información sobre los procesos de termalización de la teoría de campos que vive en el borde. Para tal fin, elegimos nuestras funciones  $\hat{M}$  y  $\hat{Q}$  que interpolan entre los valores iniciales constantes  $M_{\text{in}}$  y  $Q_{\text{in}}$  en el pasado asintótico  $v \rightarrow -\infty$  y los valores finales constantes  $M$  y  $Q$  en el futuro asintótico  $v \rightarrow \infty$ .

El  $F_{\mu\nu}$  en (5.33) puede ser obtenido a partir del potencial de gauge

$$A_v = -\gamma\hat{Q}Lz^{d-2} + \hat{\mu}L, \quad (5.66)$$

con un  $\hat{\mu}$  arbitrario que depende de  $v$ . Puesto que (5.44) no es una diferencial exacta, no es posible una continuación euclídea. Por lo tanto, impondremos el vínculo (5.49) sobre la función  $\hat{\mu}$  solo en las regiones asintóticas  $v \rightarrow \pm\infty$ . En otras palabras elegimos  $\hat{\mu} \rightarrow \gamma Q_{\text{in}} z_{\text{in}}^{d-2}$  cuando  $v \rightarrow -\infty$ , y  $\hat{\mu} \rightarrow \gamma Q z_h^{d-2}$  cuando  $v \rightarrow \infty$ , donde  $z_{\text{in}}$  y  $z_h$  son las posiciones de los horizontes antes y después de la inyección de materia.

## Teoría del borde

En la teoría de campos dual, la geometría propuesta describe un sistema que interpola entre 2 valores diferentes de temperatura como resultado de inyección homogénea de energía dentro del sistema, y al mismo tiempo *quenchea* al potencial químico. El *quench* puede aumentar o disminuir el potencial químico dependiendo de si estamos estudiando un *background* que se está cargando o descargando, y esto correspondera a una homogénea inyección de partículas/antipartículas dentro del sistema. Incluso si, como mencionamos anteriormente, no hay una coordenada global temporal, con la perspectiva de un *background* estático definimos un tiempo coordinado en la región asitónica  $z \rightarrow 0$  como  $t \sim v$ : en consecuencia la variable  $v$  en el borde coincide con el tiempo de la teoría de gauge que en él.

## 5.5. Correcciones de Gauss-Bonnet

En el marco de la correspondencia AdS/CFT, el término de Gauss-Bonnet genera contribuciones que deforman el espacio-tiempo a  $z$  grande, esto quiere decir que genera correcciones en el IR de CFT.

### 5.5.1. La métrica AdS-Vaidya en una gravedad de Gauss-Bonnet

Ahora estamos en busca de una solución de vacío de la acción de Einstein-Hilbert-Gauss-Bonnet en  $(d+1)$ -dimensiones con constante cosmológica negativa  $\Lambda = -d(d-1)/2L^2$ , para la acción

$$S_{EHGB} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) - \frac{\alpha}{8} \int d^{d+1}x \mathcal{L}_{GB}. \quad (5.67)$$

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen al variar son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{\alpha}{2}H_{\mu\nu}, \quad (5.68)$$

donde

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{GB} - 2\mathcal{R}\mathcal{R}_{\mu\nu} + 4\mathcal{R}_{\mu\gamma}\mathcal{R}^{\gamma}_{\nu} + 4\mathcal{R}_{\gamma\delta}\mathcal{R}^{\gamma\delta}_{\mu\nu} - 2\mathcal{R}_{\mu\gamma\delta\lambda}\mathcal{R}^{\gamma\delta\lambda}_{\mu}. \quad (5.69)$$

Una solución estática de (5.68) es

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-\mathcal{F}dv^2 - 2dvdz + d\mathbf{x}_{d-1}^2), \quad (5.70)$$

donde  $\mathcal{F}$  es

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2\alpha} \left( 1 - \sqrt{1 - 4\alpha f} \right), \quad \text{con} \quad f = 1 - Mz^d. \quad (5.71)$$

La métrica (5.70) en la región asintótica  $z \rightarrow 0$  da origen a un espacio AdS con un radio AdS  $L_{GB}^2 = L^2/\mathcal{F}_o$  con  $\mathcal{F}_o = (1 - \sqrt{1 - 4\alpha})/2\alpha$ . Puesto que para  $\alpha > 1/4$ ,  $f$  es complejo, el rango de validez de  $\alpha$  es  $1/4 \geq \alpha \geq -\infty$ . En el límite  $\alpha \rightarrow 0$  tenemos  $\mathcal{F} \rightarrow f$  y recuperamos la solución (5.32).

### 5.5.2. La métrica AdS-Vaidya cargada en una gravedad de Gauss-Bonnet

Estudiaremos los fondos dados por

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-\mathcal{F}dv^2 - 2dvdz + d\mathbf{x}_{d-1}^2), \quad (5.72)$$

$$F = L F_{zv} dz \wedge dv, \quad (5.73)$$

donde  $\mathcal{F}$  y  $F_{zv}$  son

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2\alpha} \left( 1 - \sqrt{1 - 4\alpha f} \right), \quad \text{con} \quad f = 1 - Mz^d + Q^2 z^{2d-2}, \quad (5.74)$$

$$F_{zv} = -\gamma(d-2)Qz^{d-3}, \quad \text{con} \quad \gamma^2 = \frac{d-1}{2(d-2)}. \quad (5.75)$$

$F_{zv}$  se obtiene a partir del campo de gauge

$$A_v = -\gamma Q z^{d-2} + \mu, \quad (5.76)$$

$$\mu = \gamma Q z_h^{d-2}. \quad (5.77)$$

Se puede ver fácilmente que si  $\alpha \rightarrow 0$ , (5.72) se transforma en (5.32). Al igual que en la sección 5.5.1, la métrica (5.72) va desde un AdS con temperatura en la región asintótica  $z \rightarrow 0$  con un radio AdS  $L_{GB}^2 = L^2/\mathcal{F}_o$  con  $\mathcal{F}_o = (1 - \sqrt{1 - 4\alpha})/2\alpha$ .

Al igual que en la sección (5.5.1), notemos que para  $\alpha > 1/4$ ,  $f$  es complejo, por lo tanto el rango de validez en  $\alpha$  para obtener soluciones es  $1/4 > \alpha \geq -\infty$ . De hecho, la solución estática (5.72)-(5.73) es una solución de vacío de la acción Einstein-Maxwell-Gauss-Bonnet en  $(d+1)$ -dimensiones con constante cosmológica negativa  $\Lambda = -d(d-1)/2L^2$

$$S_{EHMGB} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{4} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\alpha}{8} \int d^{d+1}x \mathcal{L}_{GB}. \quad (5.78)$$

Las ecuaciones de movimiento que obtenemos a partir de la  $S_{EHMGB}$  son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 2T_{\mu\nu}^{\text{Maxwell}} + \frac{\alpha}{2}H_{\mu\nu}, \quad (5.79)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (5.80)$$

donde

$$T_{\mu\nu}^{\text{Maxwell}} = F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}g^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2, \quad (5.81)$$

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{GB} - 2\mathcal{R}\mathcal{R}_{\mu\nu} + 4\mathcal{R}_{\mu\gamma}\mathcal{R}^\gamma_\nu + 4\mathcal{R}_{\gamma\delta}\mathcal{R}^\gamma_\mu{}^\delta_\nu - 2\mathcal{R}_{\mu\gamma\delta\lambda}\mathcal{R}_\mu{}^{\gamma\delta\lambda}. \quad (5.82)$$

## Teoría del borde

En términos del fondo, el pasar de un AdS-RN a un AdS-RN-GB deja las ecuaciones (5.44), (5.45), (5.46), (5.47), (5.48), (5.49) invariantes.

La geometría definida por (5.72)-(5.73) representa un estado de equilibrio en la teoría de campos dual, con un potencial químico  $\mu$  y temperatura  $T$  bien definido [81]. El tiempo en la teoría de campos está identificado por medio del cambio de coordenadas

$$dt = \sqrt{\mathcal{F}_o} \left( dv + \frac{dz}{\mathcal{F}} \right), \quad (5.83)$$

Con el fin de tener una rotación de Wick regular  $t_E = it$  en el exterior del horizonte  $z = z_- = 1$ , identificamos  $t_E \equiv t_E + 1/T$ , con

$$T = \frac{|\mathcal{F}_z(z_-)|}{4\pi\sqrt{\mathcal{F}_o}}, \quad (5.84)$$

con el subíndice  $z$  denota derivada parcial. El campo electromagnético puede ser obtenido a partir del potencial de gauge

$$A_v = -\gamma Q z^{d-2} + \chi, \quad (5.85)$$

donde  $\chi$  es una constante arbitraria que representa el valor de borde del potencial de gauge. Después de la rotación de Wick  $i\sqrt{\mathcal{F}_o}A_{t_E} = -\gamma Q z^{d-2} + \chi$ , dado que el  $t_E$  colapsa suavemente fuera del horizonte, el campo de gauge debería satisfacer  $A_{t_E}(z_-) = 0$  para no tener singularidades, fijando la constante arbitraria como

$$\chi = \gamma Q. \quad (5.86)$$

En la teoría de gauge dual, la inversa del período del tiempo euclídeo  $T$  está identificada con la temperatura del baño térmico en que la teoría de gauge es seteada, mientras el valor de borde de la componente temporal del potencial de gauge  $\mu = \chi/\sqrt{\mathcal{F}_o}$  corresponde a la fuente de un operador cargado, es decir, el potencial químico de la teoría de gauge.

## Estados dependientes del tiempo en un fondo de Gauss-Bonnet

### Geometría del *bulk*

Como hicimos en la sección 5.4.2 para la métrica de AdS-RN, ahora el tensor de energía impulso para la métrica (5.72) de AdS-GB-RN dependiente del tiempo es

$$2T_{\mu\nu}^{\text{Materia}} = [G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}] - 2T_{\mu\nu}^{\text{Maxwell}} - \frac{\alpha}{2}H_{\mu\nu}, \quad (5.87)$$

En consecuencia obtenemos

$$\begin{aligned} T_{vv}^{\text{Materia}} &= \frac{1}{2z^2} [-3z \mathcal{F}_v + \mathcal{F} (-2\Lambda - 12\mathcal{F} + 12\alpha \mathcal{F}^2 + 6z \alpha \mathcal{F}_v + 3z(1 - 2\alpha \mathcal{F})\mathcal{F}_z)] \\ &- \frac{z^2}{2} \mathcal{F} F_{zv}^2, \end{aligned} \quad (5.88)$$

$$T_{vz}^{\text{Materia}} = -\frac{1}{2z^2} \left( 2\Lambda - 3z\mathcal{F}_z + 6\mathcal{F} \left( 2 - 2\alpha\mathcal{F} + z\alpha\mathcal{F}_z \right) \right) - \frac{z^2}{2} F_{zv}^2, \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} T_{x_i x_j}^{\text{Materia}} &= \delta_{ij} \left\{ \frac{1}{2z^2} [2\Lambda - 12\alpha\mathcal{F}^2 + z[-2\mathcal{F}_z(3 + z\mathcal{F}_z) + z\mathcal{F}_{zz}]] + \frac{\mathcal{F}}{z^2} [6 + z\alpha(6\mathcal{F}_z - z\mathcal{F}_{zz})] \right\} \\ &- \delta_{ij} \frac{z^2}{2} F_{zv}^2, \end{aligned} \quad (5.90)$$

en esas expresiones el subíndice denota derivada parcial,  $\mathcal{F}_v \equiv \partial_v \mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}_z \equiv \partial_z \mathcal{F}$ . Por lo tanto, para las condiciones de energía nula (5.29) obtenemos

$$(1 - 2\alpha\mathcal{F})\mathcal{F}_v \leq 0, \quad (5.91)$$

$$\mathcal{F}_z(-3 + 6\alpha\mathcal{F} - 2\alpha\mathcal{F}_z) + z(1 - 2\alpha\mathcal{F})\mathcal{F}_z - 2z^3 F_{zv}^2 \geq 0, \quad (5.92)$$

que a su vez, estas ecuaciones implican

$$f_v \leq 0, \quad (5.93)$$

$$zf_{zz} - 3f_z - 2z^3 F_{zv}^2 \geq 0, \quad (5.94)$$

que son las mismas ecuaciones (5.57) y (5.58) obtenidas con el fondo de AdS-RN.

Como en el caso del fondo AdS-RN de la sección 5.4.2, a la solución se le debe imponer que cualquier corriente de materia física que sea fuente de los campos de gauge debe ser tipo-tiempo o nulo. En consecuencia obtenemos las mismas ecuaciones (5.59), (5.60), (5.61), (5.62) y (5.63).

## Capítulo 6

# Función de dos puntos

En este capítulo nos introduciremos en el estudio de la función de dos puntos con mucho mayor énfasis, ya que es la herramienta más importante para el estudio de termalización de sistemas altamente acoplados. Para simular esta situación tenemos que elegir una métrica que permita modelar la inyección rápida de energía a un sistema cuántico. Para fijar ideas, repasaremos lo que se describió en [108] donde el espacio-tiempo es dependiente del tiempo, comenzará siendo  $AdS_{d+1}$  puro (es decir,  $T = 0$ ) a  $t = -\infty$  y a  $t = \infty$  el sistema llega al equilibrio térmico, tomando la forma de un agujero negro de Schwarzschild en  $AdS_{d+1}$ . La métrica que describe este tipo de situaciones se conocen con el nombre de métricas de Vaidya y fueron descriptas en el capítulo 5. Esto es interpolar un espacio-tiempo a  $T = 0$  a  $t \rightarrow -\infty$  con otro con  $T \neq 0$  a  $t \rightarrow \infty$ . Para estudiar como evoluciona el sistema al pasar de  $T = 0$  a  $T \neq 0$ , tendremos que elegir algún observable.

Es así, como en [108] en el primer observable que se estudió fue la función de correlación de dos puntos calculada para puntos del borde separados espacialmente. De esta manera se puede sondear el interior del *bulk*, ya que existe un método geométrico elegante para calcular dichas funciones: bajo ciertas aproximaciones, como vimos, la función de dos puntos asociadas a campos escalares tienen una correspondencia precisa entre geodésicas que conectan los dos puntos en la frontera del espacio. El hecho de poder explorar el interior del *bulk*, nos permite estudiar la región IR de energías de la teoría de campos dual. También existen otros operadores no locales de interés como los valores de expectación de los lazos de Wilson, estos, se corresponden con superficies de área mínima dentro de AdS. Por otra parte, la entropía de entrelazamiento es dual a volúmenes mínimos. En todos estos casos se puede sondear el interior del *bulk* y de allí obtener información del proceso de termalización a distintas escalas de energía.

Más precisamente, vamos a evaluar a la función de dos puntos para el *quench* insertando en (4.75) en diferentes fondos dependiente del tiempo, por ejemplo los fondos de las secciones (5.26), (5.32), (5.33), (5.70), (5.72) y (5.73). Luego, compararemos esto con el correspondiente correlador obtenido para los fondos independientes del tiempo. La prueba de que el sistema haya llegado al equilibrio térmico se obtendrá de que

$$\delta S = S_{\substack{on-shell \\ \text{dependiente } t}}^E - S_{\substack{on-shell \\ \text{equilibrio}}}^E \quad (6.1)$$

sea cero. Cuando esto suceda, diremos que el sistema termalizó y tomaremos como tiempo de termalización  $t_T$  como el mínimo valor del tiempo  $t_f$  para el cual se cumple que  $\delta S = 0$ . En consecuencia, nuestro interés es encontrar a  $\delta S$  como función del tiempo  $t_f$  en el borde que en breve definiremos.

Un hecho bien conocido es que las trayectorias de partículas tipo-tiempo no llegan al borde de AdS, y dado que queremos conectar dos puntos del borde para ver su correlación, necesitamos trayectorias de partículas que salgan del borde y vuelvan a él, en consecuencia estudiaremos trayectorias tipo-espacio para partículas con masa y carga que se mueven sobre los fondos que estudiamos. Los puntos iniciales y finales de estas geodésicas siempre estarán separadas espacialmente por una distancia  $\ell$  en el borde, pero dependiendo si tienen carga o no, deberán estar separadas temporalmente también por un dado intervalo  $\Delta t$  (ver Figuras 6.1 y 6.2). Sólo las geodésicas tipo-espacio pueden salir y volver al borde. De hecho, veremos que si las geodésicas no tienen carga, es posible obtener soluciones con  $\Delta t = 0$ . En cambio, para el caso de geodésicas cargadas, las soluciones con  $\Delta t = 0$  no son admisibles. Para poder encontrar las geodésicas espaciales que mostramos en la figura 6.1, y debido a la invariancia ante reparametrizaciones de la acción de una partícula, parametrizamos

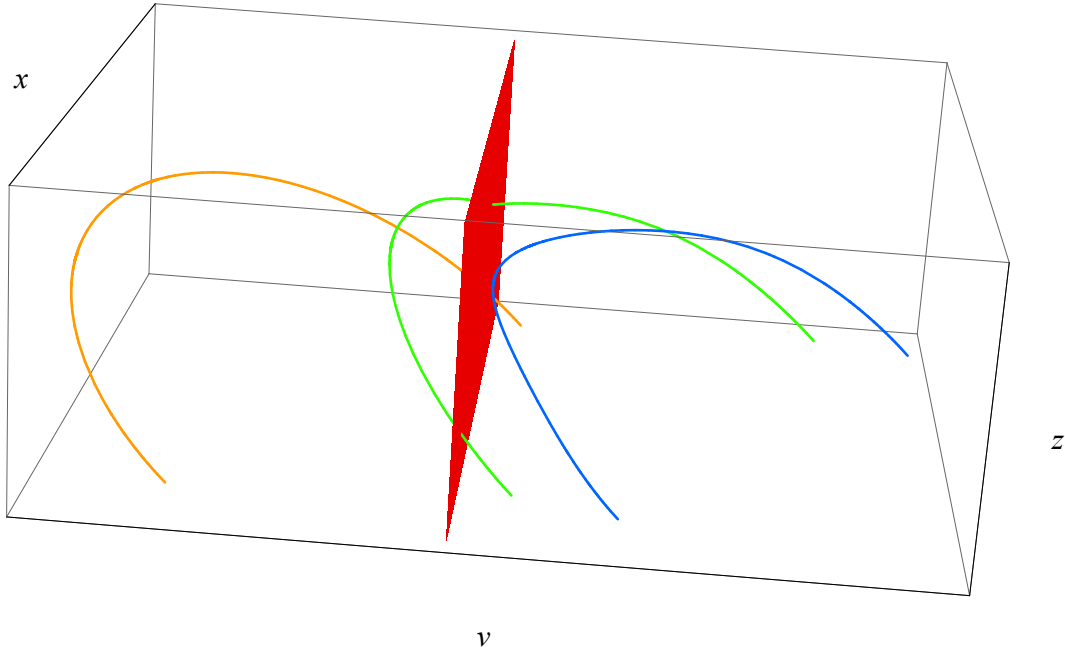


Figura 6.1: Perfil de las geodésicas espaciales cargadas requeridas para calcular la función de correlación de dos puntos en la teoría del borde. El tiempo de la teoría de Gauge corre horizontalmente y está relacionada con la coordenada  $v$  en la ec. (5.32). Los puntos iniciales y finales de las trayectorias, localizadas sobre el borde de AdS, están separadas tanto espacial como temporalmente. La geometría a la izquierda del *shell* es un AdS puro ( $T = 0$ ), y en  $v = 0$  es inyectada homogéneamente energía y carga dentro del sistema generando la formación de un agujero negro cargado con ( $T > 0$ ) a la derecha del *shell*. La geodésica naranja solo intersecta una sola vez al *shell* que está de color rojo, la geodésica verde la intersecta dos veces, mientras que la geodésica azul está termalizada no intersecta al *shell*.

la curva de la siguiente forma:  $x^\mu(x) = (v(x), z(x), x_1(x)=x, \mathbf{x}_{d-2})$  con  $\mathbf{x}_{d-2}$  constante, y sin ninguna pérdida de generalidad elegimos  $x_i < x < x_f$ , donde  $x_i, x_f$  son los extremos de la curva, donde se define como *tip* al punto de mayor alcance en la dirección radial. Las condiciones de contorno para las trayectorias en las que estamos interesados son

$$z(x_i) = z(x_f) = z_\epsilon, \quad v(x_i) = t_i \quad v(x_f) = t_f, \quad (6.2)$$

donde regularizamos el problema considerando geodésicas cuyos extremos finalizan en  $z = z_\epsilon$ , en lugar de  $z = 0$ , posteriormente tomaremos  $z_\epsilon \rightarrow 0$ . Alternativamente, las trayectorias pueden ser caracterizadas en términos de las condiciones de contorno en el tip

$$z(0) = z_*, \quad v(0) = v_*, \quad v'(0) = v'_* \quad z'(0) = 0. \quad (6.3)$$

Las separaciones espacial y temporal de las geodésicas  $\ell$  y  $\Delta t$ , están definidas como

$$\ell = x_f - x_i \quad \Delta t = t_f - t_i. \quad (6.4)$$

En este punto ya podemos inferir que  $\ell$  será una función creciente con  $z_*$ , implicando que existirá un *cutoff* en  $z_*$  dando un cutoff en  $\ell$ . Esto será confirmado por calculos numéricos que se encontraran en las futuras secciones. Lo mencionado implica que si estamos interesados en restringir la región de la geometría a explorar debemos limitar los valores de  $\ell$ . En otras palabras, la violación de las condiciones de energía en el *bulk* para el caso *cargando* impone un *cutoff* IR en los grados de libertad a ser analizados (ver fig.6.3) .

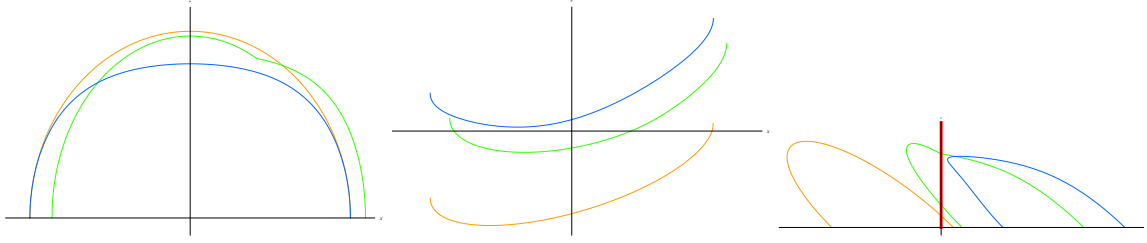


Figura 6.2: Los tres tipos de geodésicas que nos vamos a encontrar en nuestros cálculos. La geodésica naranja solo intersecta una sola vez al *shell* que está de color rojo, la geodésica verde la intersecta dos veces, mientras que la geodésica azul está termalizada no intersecta al *shell*. Los gráficos muestran las proyecciones sobre los planos  $xz$  (izquierda),  $xv$  (centro) y  $vz$  (derecha).

El enfoque a partir de la aproximación geodésica para calcular el correlador nos da una clara indicación de como se produce la termalización en teorías de campos fuertemente acopladas vía un dual gravitatoria figura 6.1. Consideramos una inyección homogénea de energía en la teoría de campos modelada mediante una capa de materia que parte desde la frontera de *AdS* hacia su interior, como la capa de materia avanza hacia el interior del espacio *AdS*. El espacio-tiempo fuera de la capa cercana al borde será descrita por un *AdS-BH*, mientras que la métrica que describe el interior del espacio-tiempo fuera de la capa de materia será un *AdS* puro. Consideremos el cálculo de la función de dos puntos utilizando la aproximación geodésica considerando geodésicas que intersectan la capa de materia a tiempos ligeramente anteriores a la inyección de energía y ligeramente posteriores. Si los puntos sobre el borde se encuentran muy próximos entre sí y a tiempos posteriores a la inyección de energía, la geodésica asociada no penetrará mucho en el *bulk*, y no cruzará la cáscara de materia. En consecuencia la función de dos puntos para esa geodésica se verá termalizada ya que estará explorando un *AdS-BH* estático. Para una separación grande de los puntos del borde, la geodésica asociada atravesará la capa de materia y se refractará como se ve en la figura 6.1, generando una desviación de la geodésica térmica. A tiempos grandes, la capa penetrará más profundamente en el *bulk* y serán necesarias separaciones muy grandes entre los puntos del borde para que las geodésicas que crucen la capa de materia. De esta forma se puede ver que el proceso de termalización procede de manera que los modos ultravioletas, que tienen los puntos del borde más cerca entre sí, termalizan primero.

## 6.1. Accediendo a la región clásicamente prohibida

Las trayectorias clásicas que necesitamos calcular, se encuentran completamente en la región clásicamente prohibida. En efecto, a partir de la acción apropiada para geodésicas temporales

$$S = \int \left( -m \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} + e A_\mu \dot{x}^\mu \right), \quad (6.5)$$

encontramos que el momento canónico es

$$p_\mu = \frac{m g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} + e A_\mu, \quad (6.6)$$

y la invarianza ante reparametrizaciones implica

$$g^{\mu\nu} (p_\mu - e A_\mu) (p_\nu - e A_\nu) + m^2 = 0. \quad (6.7)$$

En seguida mostraremos, como ese momento resulta imaginario cerca del borde para las trayectorias en las que estamos interesados, implicando que dicha región está prohibida desde un punto de vista clásico.

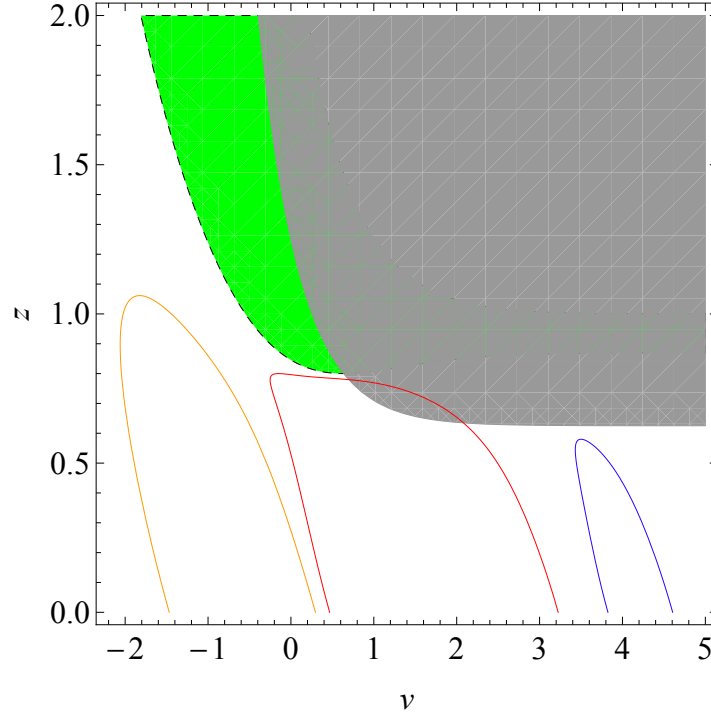


Figura 6.3: Geodésicas y la condición de energía nula: La zona gris representa la región (IR) en la que la condición de energía nula (5.64) es violada. También representamos la región interior y exterior del horizonte, definido como la solución  $z(v)$  de  $f(z, v) = 0$ , como la línea punteada. La geodésica amarilla y azul exploran la región donde se cumplen las condiciones de energía, por esa razón nos permiten analizar la termalización. En cambio, la geodésica roja no satisfacer esta condición. En otra palabras, el fondo puede usarse para analizar la termalización de los grados de libertad con  $E > E_{IR}$ . El fondo interpola  $AdS$  puro en el pasado y un agujero negro con  $Q = 2$  y  $M = 1 + Q^2$  en el futuro.

### 6.1.1. Caso en que $\epsilon = 0$

Consideremos primero el caso en que  $\epsilon = 0$ . A partir de la forma explícita de nuestra métrica asintótica a  $AdS_{d+1}$  tenemos

$$S = -mL \int d\tau \frac{1}{z} \sqrt{-\dot{\mathbf{x}}_{d-1}^2 + f\dot{v}^2 + 2\dot{z}\dot{v}}, \quad (6.8)$$

los momentos canónicos resultan

$$\begin{aligned} p_v &= -\frac{mL}{zR}(f\dot{v} + \dot{z}), \\ p_z &= -\frac{mL}{zR}\dot{v}, \\ \mathbf{p}_{d-1} &= \frac{mL}{zR}\dot{\mathbf{x}}_{d-1}, \end{aligned} \quad \text{with } R = \sqrt{-\dot{\mathbf{x}}_{d-1}^2 + f\dot{v}^2 + 2\dot{z}\dot{v}}, \quad (6.9)$$

mientras que la relación (6.7) queda

$$fp_z^2 - 2p_v p_z + \mathbf{p}_{d-1}^2 = -\frac{m^2 L^2}{z^2}. \quad (6.10)$$

La invarianza frente a traslaciones en  $x$  implica que  $\vec{p}_{d-1}$  sera una constante de movimiento. Dado que para pequeños  $z \rightarrow f \simeq 1$ , cualquier dependencia explícita en  $v$  desaparece cerca del borde. Luego  $p_v$  resulta



constante para  $z \simeq 0$ . A  $p_v$  fijo, el polinomio cuadrático en  $p_z$  en el lado izquierdo de (6.10) alcanza un mínimo para  $p_z = p_v$ . Por otra parte, el lado derecho puede ser arbitrariamente negativo para  $z \rightarrow 0$ . De manera que, para  $z$  suficientemente pequeño, la relación no tiene solución para momento real, y deberemos buscar soluciones complejas. En efecto, para  $z$  suficientemente pequeño la solución (6.10) resulta  $p_z \approx imL/z + p_v$ . Implicando momentos puramente imaginarios  $p_z = ip_z^E$  y  $p_v = ip_v^E$ . Basado en esto, para  $z$  genérico proponemos el ansatz  $\mathbf{p}_{d-1} = i\mathbf{p}_{d-1}^E$ ,  $p_z = ip_z^E$  y  $p_v = ip_v^E$ . En estas nuevas variables

$$\begin{aligned} p_v^E &= i \frac{mL}{zR} (f\dot{v} + \dot{z}), \\ p_z^E &= i \frac{mL}{zR} \dot{v}, \\ \mathbf{p}_{d-1}^E &= -i \frac{mL}{zR} \dot{\mathbf{x}}_{d-1}, \end{aligned} \quad \text{con } R = \sqrt{-\dot{\mathbf{x}}_{d-1}^2 + f\dot{v}^2 + 2\dot{z}\dot{v}}, \quad (6.11)$$

y

$$-fp_z^{E2} + 2p_v^E p_z^E - \mathbf{p}_{d-1}^{E2} = -\frac{m^2 L^2}{z^2}. \quad (6.12)$$

Como es usual en el contexto de instantones reabsorbemos el factor  $i$  en las velocidades vía una rotación de Wick del tiempo de la línea de mundo  $\tau = -i\tau_E$ , obteniendo

$$\begin{aligned} p_v^E &= -\frac{mL}{zR} (fv' + z'), \\ p_z^E &= -\frac{mL}{zR} v', \\ \mathbf{p}_{d-1}^E &= \frac{mL}{zR} \mathbf{x}'_{d-1}, \end{aligned} \quad \text{con } R = \sqrt{\mathbf{x}'_{d-1}^2 - fv'^2 - 2z'v'}, \quad (6.13)$$

donde la prima ( $'$ ) significa derivada con respecto a  $\tau_E$ . Con esta redefinición, los momentos pueden ser reinterpretados como derivados de una acción Euclídea obtenida por medio de la sustitución  $\tau = -i\tau_E$  en (6.8)

$$S_E = mL \int d\tau_E \frac{1}{z} \sqrt{\mathbf{x}'_{d-1}^2 - fv'^2 - 2z'v'}. \quad (6.14)$$

En otras palabras, el momento imaginario de (6.5) en la región prohibida se reinterpreta como el momento real de esta versión de "línea de mundo tipo tiempo euclídea".

Luego de estas redefiniciones la raíz cuadrada  $R$  permanece real solamente para trayectorias tipo-espacio. En otras palabras, nuestra acción euclídea (6.14) nos permite encontrar las trayectorias tipo-espacio clásicas donde el comienzo y el final de estas trayectorias se encuentran en el borde.

La conclusión es que, en ausencia de carga, puntos de tipo-espacio separados espacialmente en la región prohibida pueden ser unidos por trayectorias reales clásicas de la acción (6.14), obtenida a partir de la primera original (6.8) vía una rotación de Wick  $\tau = -i\tau_E$ . Esta prescripción es la que fue usada en [108].

### 6.1.2. Caso en que $e \neq 0$

Continuando con la discusión iniciada en la sección 6.1, discutiremos ahora geodésicas para partículas de prueba cargadas. En este caso, la acción (2.23) para el fondo (5.32), (5.33) se escribe

$$S = \int d\tau \left( -\frac{mL}{z} \sqrt{-\dot{\mathbf{x}}_{d-1}^2 + f\dot{v}^2 + 2\dot{z}\dot{v}} + eA_v \dot{v} \right). \quad (6.15)$$

quedando los momentos canónicos de la forma

$$\begin{aligned}
p_v &= -\frac{mL}{zR}(f\dot{v} + \dot{z}) + \mathbf{e}A_v, \\
p_z &= -\frac{mL}{zR}\dot{v}, \\
\mathbf{p}_{d-1} &= \frac{mL}{zR}\dot{\mathbf{x}}_{d-1},
\end{aligned}
\quad \text{con} \quad \begin{cases} A_v = -L\gamma\hat{Q}z^{d-2} + \mu L, \\ R = \sqrt{-\dot{\mathbf{x}}_{d-1}^2 + f\dot{v}^2 + 2\dot{z}\dot{v}}, \end{cases} \quad (6.16)$$

mientras que la relación *on-shell* resulta

$$fp_z^2 - 2(p_v - \mathbf{e}A_v)p_z + \mathbf{p}_{d-1}^2 = -\frac{m^2L^2}{z^2}. \quad (6.17)$$

Nuevamente, cerca del borde, la dependencia explícita de  $v$  desaparece, y el momento  $p_v$  puede considerarse constante. A  $p_v$  fijo, el polinomio en  $p_z$  del lado izquierdo de (6.17) tiene un mínimo en  $p_z = p_v - \mathbf{e}\mu L$  mientras que el lado derecho puede tomar valores arbitrariamente negativos, lo que implica que la relación no puede ser satisfecha para momentos reales a pequeños  $z$ . Como en el caso previo, esto puede ser resuelto por un momento puramente imaginario  $\mathbf{p}_{d-1} = i\mathbf{p}_{d-1}^E$ ,  $p_z = ip_z^E$  and  $p_v = ip_v^E$ , que nos deja escribir

$$\begin{aligned}
p_v^E &= i\frac{mL}{zR}(f\dot{v} + \dot{z}) - i\mathbf{e}A_v, \\
p_z^E &= i\frac{mL}{zR}\dot{v}, \\
\mathbf{p}_{d-1}^E &= -i\frac{mL}{zR}\dot{\mathbf{x}}_{d-1},
\end{aligned}
\quad \text{con} \quad \begin{cases} A_v = -L\gamma\hat{Q}z^{d-2} + \mu L, \\ R = \sqrt{-\dot{\mathbf{x}}_{d-1}^2 + f\dot{v}^2 + 2\dot{z}\dot{v}}, \end{cases} \quad (6.18)$$

y la relación *on-shell*

$$-fp_z^{E2} + 2(p_v^E + i\mathbf{e}A_v)p_z^E - \mathbf{p}_{d-1}^{E2} = -\frac{m^2L^2}{z^2}. \quad (6.19)$$

Si queremos interpretar estos momentos como obtenidos a partir de una rotación de Wick de la línea de mundo tipo-tiempo  $\tau = -i\tau_E$ , tenemos

$$\begin{aligned}
p_v^E &= -\frac{mL}{zR}(fv' + z') - i\mathbf{e}A_v, \\
p_z^E &= -\frac{mL}{zR}v', \\
\mathbf{p}_{d-1}^E &= \frac{mL}{zR}\mathbf{x}'_{d-1},
\end{aligned}
\quad \text{with} \quad \begin{cases} A_v = -L\gamma\hat{Q}z^{d-2} + \mu L, \\ R = \sqrt{\mathbf{x}'_{d-1}^2 - f v'^2 - 2z'v'}, \end{cases} \quad (6.20)$$

Resultando la unidad imaginaria en el término  $\mathbf{e}A_v$  y no nos permite resolver las ecuaciones de movimiento con momentos reales. A tal fin realizamos una continuación analítica  $\mathbf{e} = i\mathbf{e}_E$ , obteniendo

$$\begin{aligned}
p_v^E &= -\frac{mL}{zR}(fv' + z') + \mathbf{e}_E A_v, \\
p_z^E &= -\frac{mL}{zR}v', \\
\mathbf{p}_{d-1}^E &= \frac{mL}{zR}\mathbf{x}'_{d-1},
\end{aligned}
\quad \text{con} \quad \begin{cases} A_v = -L\gamma\hat{Q}z^{d-2} + \mu L, \\ R = \sqrt{\mathbf{x}'_{d-1}^2 - f v'^2 - 2z'v'}, \end{cases} \quad (6.21)$$

Estos momentos resultan

$$S = \int d\tau_E \left( \frac{mL}{z} \sqrt{\mathbf{x}'_{d-1}^2 - f v'^2 - 2z'v'} + \mathbf{e}_E A_v v' \right). \quad (6.22)$$

En conclusión, por una rotación de Wick del parámetro de la línea de mundo  $\tau = -i\tau_E$  y de la carga de prueba  $\mathbf{e} = i\mathbf{e}_E$ , obtenemos el sistema mecánico (6.22) cuya solución clásica con valores reales de las coordenadas son equivalentes a las soluciones complejas del sistema original (6.15) en la región prohibida.

### 6.1.3. Justificación por medio de la reducción de Kaluza-Klein

Una forma de justificar la rotación de Wick de la carga de prueba es mediante una reducción dimensional de Kaluza-Klein.

La métrica Vaidya en  $(d+1)$ -dimensiones y un potencial de gauge, pueden ser obtenidas de una descripción puramente geométrica en  $d+2$ . La escribimos

$$ds_{d+2}^2 = \frac{L^2}{z^2} (-f dv^2 - 2dv dz + d\mathbf{x}_{d-1}^2) + (du + \kappa A_v dv)^2, \quad (6.23)$$

donde  $u$  es una dirección espacial adicional y  $\kappa$  es una constante de acoplamiento en  $(d+2)$ -dimensiones. La reducción de Kaluza-Klein a lo largo de la dirección  $u$  da lugar a la métrica de Vaidya cargada (5.32)-(5.33) que usamos en nuestros cálculos. Una partícula libre moviéndose en la geometría (6.23), tiene como acción

$$S_{d+2} = - \int d\tau \frac{ML}{z} \sqrt{f \dot{v}^2 + 2\dot{v}\dot{z} - \dot{\mathbf{x}}_{d-1}^2 - \frac{z^2}{L^2} (\dot{u} + \kappa A_v \dot{v})^2}, \quad (6.24)$$

cuyos momentos canónicos son

$$\begin{aligned} p_v &= -\frac{ML}{zR} \left( f\dot{v} + \dot{z} - \frac{z^2}{L^2} (\dot{u} + \kappa A_v \dot{v}) \kappa A_v \right), \\ p_z &= -\frac{ML}{zR} \dot{v}, \\ \mathbf{p}_{d-1} &= \frac{ML}{zR} \dot{\mathbf{x}}_{d-1}, \\ p_u &= \frac{Mz}{LR} (\dot{u} + \kappa A_v \dot{v}). \end{aligned} \quad \text{con} \quad \begin{cases} A_v = -L\gamma\hat{Q}z^{d-2} + \mu L, \\ R = \sqrt{f\dot{v}^2 + 2\dot{v}\dot{z} - \dot{\mathbf{x}}_{d-1}^2 - \frac{z^2}{L^2} (\dot{u} + \kappa A_v \dot{v})^2}, \end{cases}$$

El vínculo de difeomorfismos resulta

$$fp_z^2 - 2(p_v - \kappa p_u A_v)p_z + \mathbf{p}_{d-1}^2 + \frac{p_u^2 L^2}{z^2} = -\frac{M^2 L^2}{z^2}. \quad (6.25)$$

En las ecuaciones de arriba la invarianza frente a traslaciones en  $u$  implica que el momento  $p_u$  es una cantidad conservada. Por lo tanto, la dinámica de las coordenadas restantes pueden ser descritas haciendo uso de la “función de Routh”  $\mathcal{L}_{d+1}$ , obtenida por medio de una transformación de Legendre del lagrangiano respecto a  $u$ , esto es  $\mathcal{L}_{d+1} = \mathcal{L}_{d+2} - p_u \dot{u}$ . Está “función de Routh” juega el rol de un lagrangiano para las demas coordenadas. En otras palabras, las ecuaciones de movimiento restantes después de fijar el valor de  $p_u$  pueden obtenerse mediante la variación de la acción

$$S_{d+1} = \int d\tau \left( -\frac{mL}{z} \sqrt{f\dot{v}^2 + 2\dot{v}\dot{z} - \dot{\mathbf{x}}_{d-1}^2} + \mathbf{e} A_v \dot{v} \right), \quad (6.26)$$

donde definimos

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{M^2 + p_u^2}, \\ \mathbf{e} &= \kappa p_u. \end{aligned} \quad (6.27)$$

La acción (6.26) coincide con (6.15), como era de esperar por el razonamiento KK. La dinámica de las partículas sin carga en  $(d+2)$ -dimensiones es equivalente a la dinámica de partículas cargadas en  $(d+1)$ -dimensiones cuya masa y carga dependen del momento  $p_u$  en la dirección compacta  $u$ .

En (6.25) notamos que, otra vez, para pequeños  $z$  permitidos, el momento  $p_v$  se conserva, y para  $p_u$  y  $p_v$  fijos, el lado izquierdo de la relación *on-shell* tiene un mínimo a  $p_z = p_v - \kappa p_u A_v$ , mientras que el lado derecho puede tomar valores arbitrariamente negativos, implicando que no existen soluciones para momento real. Rotando  $p_v = ip_v^E$ ,  $p_z = ip_z^E$ ,  $\mathbf{p}_{d-1} = i\mathbf{p}_{d-1}^E$  y  $p_u = ip_u^E$ , y  $\tau = -i\tau_E$ , obtenemos

$$\begin{aligned} p_v^E &= -\frac{ML}{zR} \left( f v' + z' - \frac{z^2}{L^2} (u' + \kappa A_v v') \right), \\ p_z^E &= -\frac{ML}{zR} v', \\ \mathbf{p}_{d-1}^E &= \frac{ML}{zR} \mathbf{x}'_{d-1}, \quad \text{with} \quad \begin{cases} A_v = -L\gamma\hat{Q}z^{d-2} + \mu L, \\ R = \sqrt{-f v'^2 - 2v' z' + \mathbf{x}'_{d-1}^2 + \frac{z^2}{L^2} (u' + \kappa A_v v')^2}, \end{cases} \\ p_u^E &= \frac{Mz}{LR} (u' + \kappa A_v v'), \end{aligned}$$

la relación *on-shell* resulta

$$-f p_z^{E^2} + 2(p_v^E - \kappa p_u^E A_v) p_z^E - \mathbf{p}_{d-1}^{E^2} - \frac{p_u^{E^2} L^2}{z^2} = -\frac{M^2 L^2}{z^2}. \quad (6.28)$$

Que ahora tiene soluciones para pequeños  $z$  con momento real (Euclídeo). Estas ecuaciones se pueden obtener de

$$S_{d+2}^E = \int d\tau_E \frac{ML}{z} \sqrt{-f v'^2 - 2v' z' + \mathbf{x}'_{d-1}^2 + \frac{z^2}{L^2} (u' + \kappa A_v v')^2}. \quad (6.29)$$

A partir de la conservación de  $p_u^E$  mediante la “función de Routh” tenemos

$$S_{d+1}^E = \int d\tau \left( \frac{mL}{z} \sqrt{-f v'^2 - 2v' z' + \mathbf{x}'_{d-1}^2} + \mathbf{e}_E A_v \dot{v} \right), \quad (6.30)$$

donde

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{M^2 - p_u^{E^2}}, \\ \mathbf{e}_E &= \kappa p_u^E. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Por lo tanto hemos obtenido (6.22), mediante una rotación de Wick del parámetro de la línea de mundo en  $(d+2)$  dimensiones. El cual resulta equivalente al procedimiento de una rotación de Wick en el parámetro de la línea de mundo y en la carga de prueba en  $(d+1)$  dimensiones.

## 6.2. Estudio de la función de dos puntos en diferentes situaciones

Antes de pasar al estudio de la función de correlación de dos puntos, notemos que los fondos (5.26), ((5.32), (5.33)) y (5.70) pueden ser obtenidos a partir de ((5.72),(5.73)).

Explícitamente,

- $Q = 0$  en ((5.72),(5.73)) resulta en (5.70).

- $\mathcal{F} = \frac{1}{2\alpha} \left( 1 - \sqrt{1 - 4\alpha f} \right)$ , con  $f = 1 - Mz^d + Q^2 z^{2d-2} \Rightarrow \mathcal{F} = \frac{1}{2\alpha} \left( 1 - \sqrt{1 - 4\alpha f} \right)$ , con  $f = 1 - Mz^d$

- $\alpha \rightarrow 0$  en  $((5.72), (5.73))$  da origen a  $((5.32)$  y  $(5.33))$ .
  - $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{F} = f$  con  $f = 1 - Mz^d + Q^2 z^{2d-2}$ .
- $\alpha \rightarrow 0$  y  $Q = 0$  en  $((5.72), (5.73))$  resultan en (5.26).
  - $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{F} = f$  con  $f = 1 - Mz^d$ .

Puesto que queremos estudiar funciones de dos puntos asociadas a operadores escalares con y sin carga a partir de geodésicas, vamos a escribir la acción y las ecuaciones de movimiento de la manera más general posible, y luego modificando los parámetros estudiaremos cada situación en particular. Primero estudiaremos geodésicas en fondos estáticos, para luego pasar a los que si dependen del tiempo.

### Estados de equilibrio

Como mencionamos en la sección 3.3 todo espacio-tiempo independiente del tiempo tiene asociada una temperatura y por lo tanto representa sistemas de teorías de campos en equilibrio. Substituyendo explícitamente la solución AdS-RN-GB eterna (5.72), (5.73) dentro de la acción (4.75) obtenemos

$$S_{\text{equilibrium}}^E = mL \int_{x_i}^{x_f} dx \left( \frac{1}{z} \sqrt{1 - \mathcal{F}v'^2 - 2z'v'} - q_E(\gamma Q z^{d-2} - \mu)v' \right), \quad (6.32)$$

aquí  $(')$  denota derivada con respecto al parámetro euclídeo  $\tau_E$ . Hemos fijado el gauge con  $\tau_E = x$ . El primer término corresponde longitud geodésica, mientras que el segundo corresponde al acomplamiento con el potencial de gauge. Notemos que, cuando estamos interesados en geodésicas que comiencen finalicen en el mismo valor de  $v$ , podemos eliminar la contribución de  $\mu$  en el segundo término.

A partir de esta acción se obtienen 2 ecuaciones de movimiento de segundo orden para  $v(x)$  y  $z(x)$ , que poseen dos primeras integrales. Una proviene del hecho de que el lagrangiano no depende explícitamente de  $x$ , y la segunda proviene de que la métrica no depende de  $v$ . Las ecuaciones que se obtienen son

$$z\sqrt{1 - \mathcal{F}v'^2 - 2z'v'} = \frac{1}{\tilde{E}}, \quad (6.33)$$

$$(\mathcal{F}v' + z')\tilde{E} + \gamma q_E Q z^{d-2} = \mathcal{F}_* v'_* \tilde{E} + \gamma q_E Q z_*^{d-2}, \quad (6.34)$$

donde el valor de las constantes del lado derecho se fijan a partir del tip, recordando las condiciones (6.3) y denotamos  $\mathcal{F}(z_*) = \mathcal{F}_*$  y  $\tilde{E} = 1/z_* \sqrt{1 - \mathcal{F}_* v_*'^2}$ <sup>1</sup>.

Resolviendo (6.33)-(6.34) para  $z'$  obtenemos

$$z' = \pm \sqrt{\left( \frac{1}{\tilde{E}^2 z^2} - 1 \right) \mathcal{F} + \left( \mathcal{F}_* v'_* + \frac{\gamma q_E Q}{\tilde{E}} (z_*^{d-2} - z^{d-2}) \right)^2}. \quad (6.35)$$

El doble signo en la expresión corresponde a las dos ramas de la trayectoria, siendo positivo para  $x_i < x < 0$  y negativo para  $0 < x < x_f$ . Asimismo podemos resolver para  $v'$  obteniendo

$$v' = \frac{1}{\mathcal{F}} \left( \frac{\gamma q_E Q}{\tilde{E}} (z^{d-2} - z_*^{d-2}) + \mathcal{F}_* v'_* - z' \right), \quad (6.36)$$

y  $z'$  dada por (6.35). Los dos parámetros en el tip  $(z_*, v'_*)$  se encuentran relacionados con los parámetros físicos de separación de los operadores  $\hat{O}$  en el borde  $(\ell, \Delta t)$  mediante

$$\ell = x_f - x_i = \int_{x_i}^0 dx + \int_0^{x_f} dx = 2 \int_{z_e}^{z_*} \frac{dz}{z'}. \quad (6.37)$$

y

$$\Delta t = t_f - t_i = v(x_f) - v(x_i) = \int_{x_i}^{x_f} dx v'. \quad (6.38)$$

---

<sup>1</sup>Para el caso de partículas sin carga, las ecuaciones (6.33) y (6.34) implica que el movimiento de las partículas esta restringido a una superficie  $t = t_0$ .

Finalmente, insertando (6.33) y (6.36) dentro de (6.32) podemos expresar la acción *on-shell* como

$$S_{\text{on-shell equilibrio}}^E = 2 \frac{mL}{\tilde{E}} \int_{z_\epsilon}^{z_*} \frac{dz}{z'} \left( \frac{1}{z^2} + \gamma q_E Q \frac{z^{d-2}}{\mathcal{F}} \left( \gamma q_E Q (z^{d-2} - z_*^{d-2}) - \mathcal{F}_* v'_* \tilde{E} \right) \right) + mL \mu q_E \Delta t. \quad (6.39)$$

Dado que la acción *on-shell* diverge cuando la trayectoria alcanza el borde  $z = 0$ , debemos regularizarla. Esto lo hacemos introduciendo el cutoff UV  $z_\epsilon$ . El factor 2 delante de la acción debe a que las dos ramas de la geodésica dan idénticas contribuciones. A partir de las fórmulas de arriba, podemos calcular la acción *on-shell* como función de  $\ell$  y  $\Delta t$ . Observemos que para fondos independientes de  $v$ , esta no depende de  $v_*$ .

*Observación:* Notemos que si hacemos  $q_E = 0$  en (6.34) obtenemos

$$(\mathcal{F} v' + z') \tilde{E} = \mathcal{F}_* v'_* \tilde{E}, \quad (6.40)$$

vemos que esta ecuación que nos queda, depende de la condición de contorno  $v'_*$ . En consecuencia, si elegimos  $v'_* = 0$  tenemos curvas que permanecen a  $t = \text{cte}$ , es decir

$$\mathcal{F} v' + z' = 0 \quad \rightarrow \quad v = \text{cte} - \int \frac{dz}{\mathcal{F}}. \quad (6.41)$$

Ahora bien, si  $q_E \neq 0$  de (6.34) concluimos que no es posible elegir  $v'_* = 0$  como condición de contorno, ya que si la imponemos, obtenemos

$$(\mathcal{F} v' + z') \tilde{E} = \mathcal{F}_* v'_* \tilde{E}, \quad (6.42)$$

De donde observamos que el lado derecho de (6.42) es una constante y el lado izquierdo no necesariamente lo es. Esto trae aparejado, que cuando queremos estudiar geodésicas para partículas cargadas,  $\Delta t$  será distinto de cero.

### Estados dependiente del tiempo

La acción para una geodésica cargada tipo-espacio en un espacio-tiempo dependiente del tiempo, en nuestro caso (5.32), (5.33) o (5.72), (5.73) con  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(z, v)$ , toma la forma

$$S_{\text{time-dependent}}^E = mL \int_{x_i}^{x_f} dx \left( \frac{1}{z} \sqrt{1 - \mathcal{F} v'^2 - 2z' v'} - q_E (\gamma \hat{Q} z^{d-2} - \hat{\mu}) v' \right). \quad (6.43)$$

Donde las constantes  $Q$  y  $M$  son sustituidas por funciones  $\hat{Q}$  y  $\hat{M}$  que dependen de  $v$ . En este caso no es posible eliminar la contribución del potencial químico  $\hat{\mu}$  (ver la discusión que está en (5.66)). Debido a la ausencia de invariancia de traslaciones en  $v$ , la acción *on-shell* no tiene una simple expresión como en (6.39). La ecuaciones que se obtienen al variar la acción (6.43) resultan

$$z \sqrt{1 - \mathcal{F} v'^2 - 2z' v'} = \frac{1}{E} \quad (6.44)$$

$$E \left( z'' + \frac{\mathcal{F}_v v'^2}{2} + \mathcal{F}_z z' v' + \mathcal{F} v'' \right) = -\gamma q_E \hat{Q} (d-2) z^{d-3} z', \quad (6.45)$$

donde el valor de la única constante ( $E$ ) se fija nuevamente con los valores para la trayectoria en el tip:  $E = 1/z_* \sqrt{1 - \mathcal{F}_* v_*'^2}$ . Las condiciones de borde para las trayectorias son (6.2)<sup>2</sup>.

Estas ecuaciones son resueltas numéricamente por el método de *shooting*. En la práctica, en lugar de mirar geodésicas que comienzan y terminan en el borde (regularizadas), los calculos numéricos son simplificados

<sup>2</sup>Tanto para el fondo que depende del tiempo como para el que no, vemos que son geodésicas tipo-espacio. Esto es, dado que  $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = (1, 0, 0, \dots, v', z')$  obtenemos

$$V^\mu V_\mu = \frac{1}{z^2} (1 - f v'^2 - 2z' v'), \quad (6.46)$$

por otro lado, usando (6.44) encontramos

$$V^\mu V_\mu = \frac{1}{z^2} \frac{1}{z^2 E^2} > 0 \quad (6.47)$$

cumpliendo la condición de que geodésicas tipo-espacio son aquellas en que  $V^\mu V_\mu > 0$ .

haciendo el *shooting* a partir de  $z_*$ . En otras palabras, vamos a resolver el sistema (6.44)-(6.45) con condiciones de contorno (6.3), con  $x$  variando entre un valor inicial y final, es decir  $x_i < x < x_f$ . Para cada valor de  $(z_*, v_*, v'_*)$  en el tip, encontramos geodésicas caracterizadas por  $(\ell, \Delta t, t_f)$  (ver Figs. 6.1 y 6.2). Los gráficos del siguiente capítulo, muestran las curvas de termalización dadas por (6.1) con la acción (6.43) evaluada *on-shell*, y donde  $S_{on-shell}^E$  es (6.39). Al mirar evaluar  $\delta S$ , resulta evidente que es función de  $(\ell, \Delta t, t_f)$ , donde nuestro interés principal es resolver estas geodésicas con  $\ell$  y  $\Delta t$  fijo, e ir observando la evolución de la acción *on-shell*  $S_{on-shell}^E$  como función de  $t_f$ . Y donde el tiempo de termalización sera el mínimo valor de  $t_f$  para el que la  $S_{on-shell}^E$  se vuelve constante o dicho de otra forma, el mínimo valor de  $t_f$  para el cual  $\delta S = 0$ .

Es importante señalar fondos dependientes del tiempo que se cargan violan las condiciones de energía nula para  $z$  grande. En tal caso tenemos que asegurarnos de que nuestras geodésicas sólo exploren las partes bien comportadas de la geometría (ver Fig. 6.3). Como mencionamos antes, esto implica que no podemos hacer pruebas de termalización con funciones de correlación para cualquier  $\ell < \ell_{IR}$ . Por otra parte, tanto para el fondo que se está descargando, como para el de carga constante, no tenemos la cota infraroja. Y podemos sondear el termalización con cualquier valor de  $\ell$ .





# Capítulo 7

## Resultados

En este capítulo estudiaremos un tipo de operador no-local en diferentes tipos de geometrías. Este es la función de correlación de dos puntos. Dado que la termalización la vamos a estudiar en diferentes fondos, hacemos una distinción importante en un principio: al propagador se lo puede estudiar con  $\Delta t = 0$  y  $\Delta t \neq 0$ . Como dijimos en la sección 6.2, cuando estudiamos la función de dos puntos asociados a operadores escalares sin carga,  $\Delta t$  puede ser  $\Delta t = 0$  o  $\Delta t \neq 0$ . Pero cuando estudiamos la función de dos puntos asociados a operadores escalares cargados,  $\Delta t$  no puede ser igual a cero, por lo tanto necesariamente para realizar dicho estudio tenemos que fijar  $\Delta t \neq 0$ .

Por otro lado, las consideraciones marcadas en las secciones 5.3, 5.4 y 5.5 de las secciones previas fueron realizadas para funciones arbitrarias  $\hat{M}$  y  $\hat{Q}$ . En este capítulo, con el fin de calcular el tiempo de termalización para diferentes observables, vamos a necesitar expresiones explícitas para esas funciones. Por lo tanto, elegimos

$$\hat{M} = \frac{M - M_{\text{in}}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + M_{\text{in}} \quad (7.1)$$

$$\hat{Q} = \frac{Q - Q_{\text{in}}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + Q_{\text{in}}, \quad (7.2)$$

donde aquí  $v_0$  parametriza el ancho de la cáscara de materia y el caso  $v_0 \rightarrow 0$  corresponde a una rápida inyección de energía que se discute en [108]. Esas funciones satisfacen

$$\lim_{v \rightarrow -\infty} \hat{M} = M_{\text{in}} \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \hat{M} = M \quad \lim_{v \rightarrow -\infty} \hat{Q} = Q_{\text{in}} \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \hat{Q} = Q \quad (7.3)$$

En el momento de los cálculos tendremos que aclarar que fondo vamos a estudiar, esto es, la masa inicial y final, y carga inicial y final, etc. Estos fondos interpolan varias situaciones dependiendo de estos valores. Un ejemplo que más adelante trataremos será la transición de agujero negro AdS-RN con masa  $M_{\text{in}}$  y carga  $Q_{\text{in}}$  en el pasado lejano  $v \ll v_0$  y un agujero negro AdS-Reissner-Nordström con masa  $M$  y carga  $Q$  futuro lejano  $v \gg v_0$ . En el caso en que  $M_{\text{in}} = Q_{\text{in}} = 0$  la geometría del pasado lejano corresponde a un AdS puro.

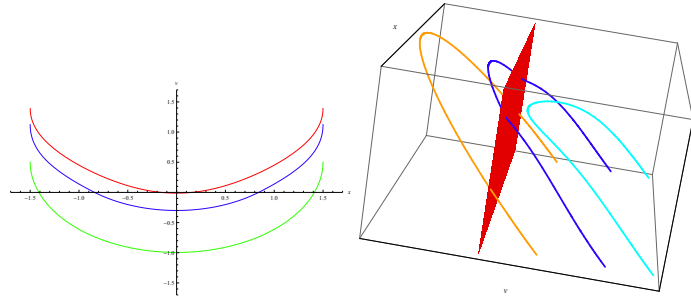


Figura 7.1: La figura de la izquierda muestra el perfil  $v = v(x)$  de las geodésicas a medida que cambia el tiempo, para  $\Delta t = 0$ . La figura de la derecha muestra estas geodésicas en forma completa.

Para sintetizar, la idea de la tesis fue encontrar un dual gravitatorio para un sistema que pueda describirse mediante la acción

$$S = S_{CFT} + \int d^d x \lambda(t) \hat{\mathcal{O}}(\vec{x}), \quad (7.4)$$

donde  $S_{CFT}$  esta dada por (4.107) y  $\lambda(t)$  es el parámetro que estaremos quecheando para poder seguir la evolución de la función de dos puntos asociada al operador  $\hat{\mathcal{O}}(\vec{x})$ .

## 7.1. Termalización de las funciones de dos puntos de un sistema en un baño termico con $\Delta t = 0$ y $\Delta t \neq 0$

Vamos a comenzar analizando el proceso de termalización en el que la carga del fondo es cero, que corresponde a un *quench* térmico sin tener potencial químico en la teoría del borde. Para esto elegimos

$$\hat{M} = \frac{M - M_{\text{in}}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + M_{\text{in}}, \quad (7.5)$$

$$\hat{Q} = 0, \quad (7.6)$$

y en donde ademas  $\alpha = q_e = 0$ . En consecuencia, como dijimos en la sección 6.2, graficamos  $\delta S$  como función de  $t_f$ , para una dada dimensión y un dado  $\ell$ . Por lo tanto teniendo está información, ya estamos en condiciones de describir de forma precisa el proceso de termalización. Para ello lo que hacemos es comparar el valor de  $S_{\text{time-dependent}}^E$  a cada tiempo  $t_f$  con el valor de  $S_{\text{on-shell equilibrium}}^E$  hallado en el Capítulo anterior. El mismo procedimiento lo repetimos para distintas longitudes  $\ell$  y distintas dimensiones del espacio entre  $AdS_4$ ,  $AdS_5$  y  $AdS_6$ . El resultado de dichos cálculos pueden apreciarse tanto en la Fig.7.4<sup>1</sup>, como en la fig 7.5.

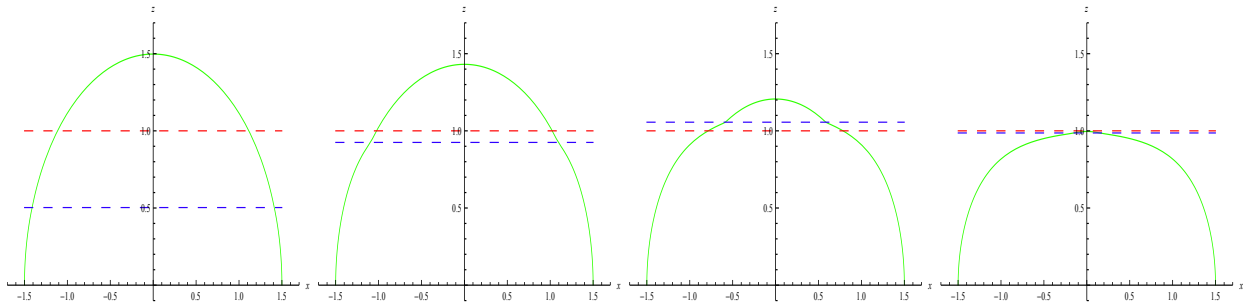


Figura 7.2: Avance de la capa de materia en la métrica AdS-Vaidya con  $M = 1$ ,  $\ell = 3$ ,  $\Delta t = 0$  y cambio en la forma de las geodésicas. En rojo se muestra el horizonte de eventos correspondiente y en azul la posición de la capa. Cada figura corresponde  $t_f=0.5, 0.95, 1.25, 1.39$ . resp.

<sup>1</sup>Los resultados obtenidos en esta gráfica son los reportados por [108].

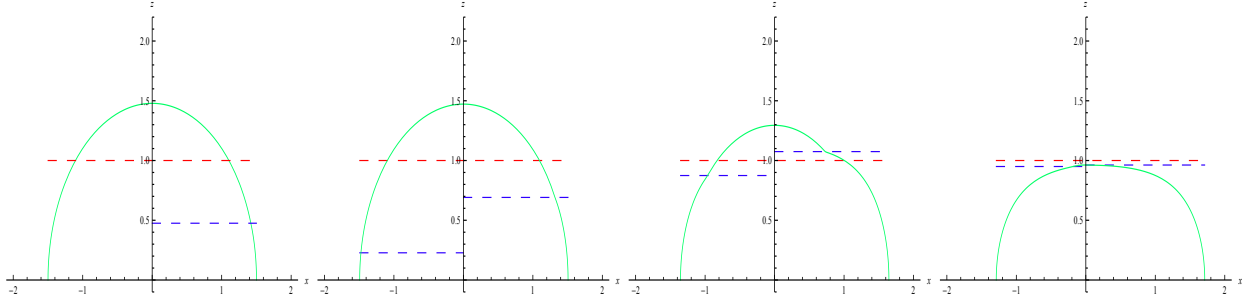


Figura 7.3: Avance de la capa de materia en la métrica AdS-Vaidya con  $M = 1$ ,  $\ell = 3$ ,  $\Delta t \neq 0.5$  y cambio en la forma de las geodésicas. En rojo se muestra el horizonte de eventos correspondiente y en azul la posición de la capa. Cada figura corresponde  $t_f = 0.49, 0.72, 1.36, 1.65$ . resp.

### Avance de la capa de materia

Para observar el proceso de termalización a partir de geodésicas, es conveniente ver cómo avanza la capa de materia desde no tener un horizonte (AdS puro) hasta formarse un agujero negro (espacio AdS-BH). Este análisis puede ser útil para geodésicas donde  $\Delta t = 0$ , pero no tanto para geodésicas con  $\Delta t \neq 0$ .

Por lo tanto, podemos ver en la figura 7.1, donde graficamos geodésicas con  $\Delta t = 0$ , y por lo tanto se observa su simetría en  $x$ . Dado que la cáscara de materia está en  $v(x) = 0$ , si encontramos el valor de  $x$  que hace que  $v(\tilde{x}) = 0$ , entonces podemos encontrar donde está la cáscara en  $z$  haciendo  $z(\tilde{x})$ . Para geodésicas con  $\Delta t = 0$  podemos observar estos perfiles  $z = z(x)$  en las gráficas de la Fig.7.2.

De las curvas de termalización, observamos que las geodésicas para  $t_f$  pequeños le corresponden al AdS puro, y como vemos en la figura 7.2, la misma resulta en un semicírculo en el plano  $z - x$ . Al avanzar un poco la geodésica sigue siendo prácticamente igual. Solamente cuando la capa se acerca al horizonte es cuando se observan cambios importantes. La razón es que cuando la capa toca el horizonte, la geodésica ya se tiene que encontrar por debajo del mismo. En consecuencia, si la longitud es lo suficientemente grande como para cerrarse por encima de la futura posición del horizonte de eventos, cuando la capa avance, la capa se va a tener que retraer hasta estar por debajo del mismo. Eso se puede observar en las últimas figuras, donde rápidamente la geodésica retrocede hasta tener su posición final termalizada una vez que la capa queda dentro del agujero negro.

En el caso en  $\Delta t \neq 0$ , debido a que  $v = v(x)$  no posee simetría en el eje  $x$ , el perfil  $z = z(x)$  no es muy apropiado para observar la evolución de la capa de materia. En las figuras 6.1, 6.2 y 7.3 podemos ver que no tenemos simetría alrededor del eje  $v$ , es por esta razón que la figura 7.3 no aparece la cáscara de materia en la región negativa de las  $x$ .

#### 7.1.1. Termalización de las funciones de dos puntos de un sistema en un baño térmico con $\Delta t = 0$

La termalización de las funciones de dos puntos de un sistema en un baño térmico con  $\Delta t = 0$ , está descrito mediante la dualidad AdS/CFT por trayectorias de partículas sin masa en un fondo AdS-BH Vaidya que depende del tiempo (5.26), donde los puntos iniciales y finales de estas trayectorias están separados solo espacialmente por una distancia  $\ell$ .

En esta sección presentamos los resultados de la termalización mencionada en la sección 7.1 en el caso en que  $\Delta t = 0$ .

Lo que vemos en las figuras 7.4 se condice con los resultados de la Sección 7.1. Observamos en todos los casos que la sistema le lleva un cierto tiempo llegar al estado termalizado. La razón de este retraso es justamente que el sistema se entera de la inyección de energía a distancias que son del orden de la longitud de onda térmica  $\ell_D \sim (\pi T)^{-1}$  y por eso al principio del proceso el cambio es muy lento [9].

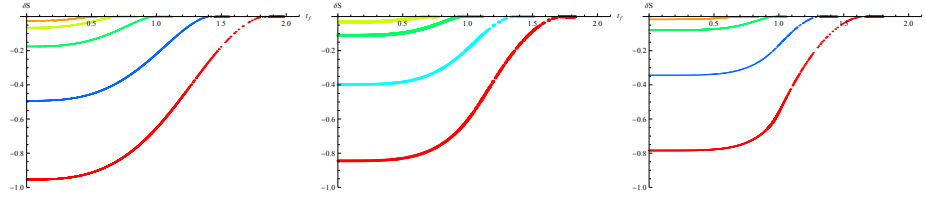


Figura 7.4: Funciones de correlación de dos puntos en función del  $t_f$  para  $\Delta t = 0, Q = \alpha = q_e = 0$ . *Izquierda* Figuras para  $d = 3, \ell = 1, 1.4, 2, 3, 4$  (naranja, amarillo, verde, azul y rojo, respectivamente.). *Centro:* Figuras para  $d = 4, \ell = 1.4, 2, 3, 4$  (amarillo, verde, azul y rojo, respectivamente.). *Derecha:* Figuras para  $d = 5, \ell = 1.4, 2, 3, 4$  (amarillo, verde, azul y rojo, respectivamente.). Todos los casos corresponden a un fondo que interpola masas entre  $M_{\text{in}} = 0$  and  $M = 1$ .

La termalización tarda más si la distancia entre los puntos del borde es mayor. Este es un resultado importante ya que contradice los resultados obtenidos con teorías de campos perturbativas, donde el proceso se manifiesta de forma inversa. Por otro lado, este resultado es independiente de la dimensión. Y observamos que para  $t_f = 0$  la diferencia entre el estado fuera del equilibrio y el de equilibrio, es menor al aumentar la dimensión.

Este hecho puede explicarse pensando que las geodésicas están relacionadas en cierta forma con la entropía del sistema. En particular, para  $d = 2$  son proporcionales a la entropía de entrelazamiento. Con lo cual al aumentar la dimensionalidad y mantener la distancia geodésica entre dos puntos que dejan constante todas las coordenadas de la frontera salvo una, podemos pensar que existen muchos grados de libertad que no son afectados por esta prueba de termalización. Al aumentar la dimensionalidad, aumenta esta cantidad de grados de libertad y por lo tanto, el colapso de la capa tiene cada vez menos relevancia en cuanto al orden del sistema, ya que afecta a menos grados de libertad<sup>2</sup>.

### 7.1.2. Termalización de las funciones de dos puntos de un sistema en un baño térmico y $\Delta t \neq 0$

La termalización de las funciones de dos puntos de un sistema en un baño térmico con  $\Delta t \neq 0$ , está descrito mediante la dualidad AdS/CFT por trayectorias de partículas sin masa en un fondo AdS-BH Vaidya que depende del tiempo (5.26), donde los puntos iniciales y finales de estas trayectorias están separados tanto espacialmente por una distancia  $\ell$ , como un  $\Delta t \neq 0$ .

En esta sección mostramos la termalización mencionada en la sección 7.1 para el caso en que  $\Delta t \neq 0$ .

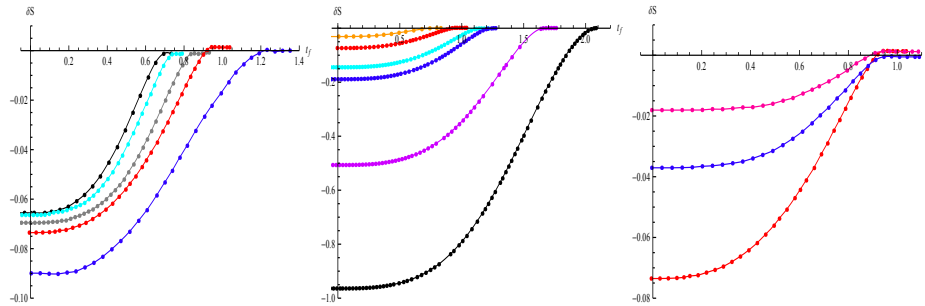


Figura 7.5: Funciones de dos puntos como función del tiempo  $t_f$  para un *quench* térmico en ausencia de potencial químico. *Izquierda:* gráficos para  $d = 3, \ell = 1.4$  y  $\Delta t = 0, 0.1, 0.3, 0.5, 1$  (negro, celeste, gris, rojo y azul resp.). *Centro:* gráficos para  $d = 3, \Delta t = 0.5$  y  $\ell = 1, 1.4, 1.8, 2, 3, 4$  (naranja, rojo, celeste, azul, violeta y negro resp.). *Derecha:* gráficos para  $\ell = 1.4, \Delta t = 0.5$  y  $d = 3, 4, 5$  (rojo, azul y violeta resp.). Todos los casos corresponden a fondos sin carga que interpola entre  $M_{\text{in}} = 0$  y  $M = 1$ .

<sup>2</sup>Esta justificación la ha proporcionado [11].

En este caso encontramos los resultados hallados en [109] y son presentados en la figura 7.5, donde en las curvas de termalización se presenta a la acción *on-shell* regularizada como función de  $t_f$ . El tiempo de termalización, definido como el valor de  $t_f$  para el cual la curva toca el eje horizontal  $\delta S = 0$ , se incrementa con  $\ell$  y con  $\Delta t$ , implicando que los grados de libertad UV termalizan primero. Este fenómeno es conocido como “*top down thermalization*”. Por otra parte, vemos que el tiempo termalización también aumenta con la dimensión del sistema.

## 7.2. Función de dos puntos en un fondo AdS-Reissner-Nordström

Gran parte de los resultados de esta sección están reportados en [10], [11], [101]. Básicamente y a modo de entrenamiento nosotros reproducimos exactamente sus resultados para luego emplear ese procedimiento al problema de la termalización de operadores escalares cargados.

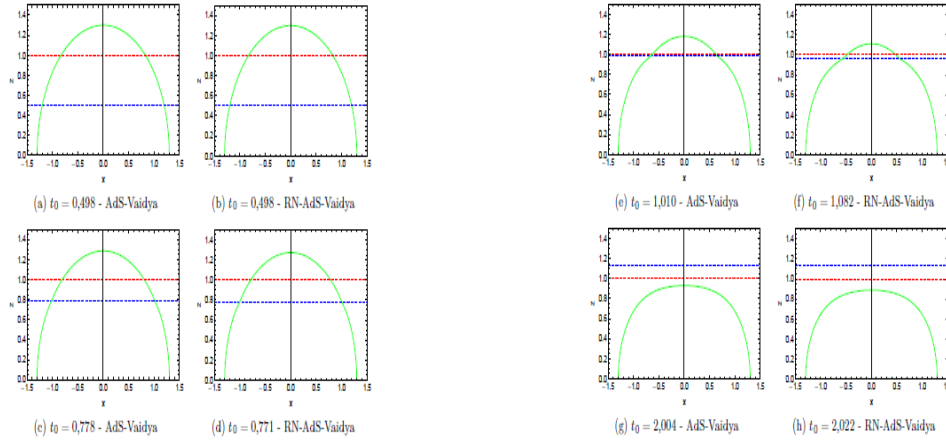


Figura 7.6: Avance de la capa de materia en la métrica AdS-Vaidya con  $r_- = 1$  en comparación con la capa de materia cargada en la métrica AdS-RN-Vaidya, con  $r_- = 1$  y  $\hat{Q}/\hat{M} = 1/2$ . En ambos casos la separación en el borde es de  $\ell = 2.6$ . En rojo se muestra el horizonte de eventos correspondiente y en azul la posición de la capa. Las gráficas del AdS-Vaidya son las mismas que en la Fig. 7.2 y se exhiben nuevamente a modo de comparación. Se trató de elegir tiempos  $t_0$  lo más similares para posibilitar la comparación.

Es un hecho bien conocido los plasmas de quarks y gluones que se producen tanto en el RHIC como en el LHC están fuertemente acoplados, y que además poseen un pequeño potencial químico, pero que no llega a ser despreciable. Los experimentos realizados en el RHIC muestran que el cociente entre el potencial químico  $\mu$  y la temperatura es del orden de  $\frac{\mu}{T} \sim 0.15$  y como se ve no es grande [110]. Es por esta razón que la aplicación de la dualidad AdS/CFT en este tema es muy recomendada. El dual gravitatorio que mejor describe por el momento a este sistema es un fondo de AdS-RN, ya que la carga del agujero negro está asociada con el potencial químico de la teoría de campos. En esta sección estamos interesados en el efecto que tiene el potencial químico en los tiempos de termalización de las funciones de dos puntos asociados a operadores escalares sin carga.

En consecuencia, utilizaremos una métrica del tipo de AdS-Vaidya pero que incluye una capa de materia cargada, lo que permite analizar la termalización de este tipo de teorías. Se analizarán, al igual que en la sección 7.1, la termalización de las funciones de dos puntos de operadores escalares sin carga de la teoría cuántica de campos con  $\Delta t = 0$  y  $\Delta t \neq 0$ , en un rango que cubre desde el caso sin carga (AdS-BH), que equivale a  $\frac{\mu}{T} = 0$ , hasta el caso extremal en el que  $\frac{\mu}{T} = \infty$ . Es decir, que se evalúa todo el posible rango de modificaciones que introduce el potencial químico (la carga desde el punto de vista gravitatorio) en las

teorías de campos en  $d = 3, 4, 5$ .

A partir de los resultados obtenidos, se puede asegurar que el efecto de introducir un potencial químico en la teoría de campos es retrasar su tiempo de termalización.

### 7.2.1. AdS-RN $q_E = 0$ , $\Delta t = 0$ Cargando y descargando

#### $q_E = 0$ , $\Delta t = 0$ Cargando

Estudiaremos el caso en que el fondo se esta cargando en donde  $q_E = 0$  y  $\Delta t = 0$ <sup>3</sup> y donde al *quench* lo realizamos en la temperatura y el potencial químico. En consecuencia (7.1) y (7.2) toman la forma

$$\hat{M} = \frac{M}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right), \quad (7.7)$$

$$\hat{Q} = \frac{Q}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right). \quad (7.8)$$

De esta manera, ya estamos en condiciones de calcular cómo es el proceso de termalización en el caso de esta métrica con masa y carga. Resulta interesante, en principio, comparar estos resultados con el caso anterior sin carga.

Para ello, lo primero que se hizo fue observar cómo es la evolución de las geodésicas al estilo de lo que se muestra en la Fig. 7.2 de la sección 7.1.

Es decir, para realizar dicha comparación necesitamos resolver el sistema para una métrica que tuviera el mismo horizonte de eventos que en el caso anterior,  $r_- = 1/z_- = 1$ , pero ahora en lugar de tener  $\hat{Q}/\hat{M} = 0$  elegimos  $\hat{Q}/\hat{M} = 1/2$ . Esta elección está de acuerdo con las restricciones impuestas por las Ecs. (5.41) y (5.47). En la Fig. 7.6<sup>4</sup> podemos ver y comparar la evolución de ambos sistemas para el caso  $d = 4$ .

Vemos que se observa un comportamiento similar. Para tiempos cortos las geodésicas prácticamente no cambian con respecto a las de AdS puro. A partir de aproximadamente  $t_0 = 0.8$ , en esta configuración con separación  $\ell = 2.6$ , se empiezan a notar cambios en las geodésicas. Entre  $0.8 < t_0 < 1$  las geodésicas en ambos sistemas empiezan a cambiar abruptamente para llegar a su valor final de equilibrio. Si bien este proceso es igual para el caso cargado, la evolución del sistema es distinta, notando cambios en los distintos tiempos entre uno y otro sistema, que harán, como veremos, que el sistema cargado termalice después que el sistema sin carga. Pasamos ahora al estudio sistemático acerca de cómo varía la termalización en este tipo de geometrías. Para ello, nuevamente, se volvió a elegir mantener fijo el radio del horizonte de eventos en  $r_- = 1$ . Eso hace que la masa del agujero negro quede definida, siguiendo la Ec. (5.41), como

$$M = 1 + Q^2. \quad (7.9)$$

Esta relación entre  $M$  y  $Q$  es válida desde  $Q = 0$  hasta el caso extremal, que se obtiene haciendo  $T = 0$  en (5.47), además de usar (5.41). Obteniendo como resultado

$$Q_{ext} = \sqrt{\frac{d}{d-2}} \quad (7.10)$$

Con esta elección cubrimos todo el rango de parámetros y modificaciones que pueden aparecer debido a la presencia de una carga (o potencial químico) en el problema, manteniendo fijo el radio del horizonte de eventos pues, como se vio, eligiendo  $0 < Q < Q_{ext}$  estamos pasando por todos los casos,  $0 < \frac{\mu}{T} < \infty$ , en la teoría de campos asociada. Esto es lo que se puede ver para las funciones de dos puntos en  $d = 3, 4, 5$  y para  $\ell = 2, 3, 4$  en las gráficas de las Fig. 7.7, 7.8, 7.9.

Se observan ciertos comportamientos similares al caso sin carga. En principio, cuanto mayor es la longitud de separación en el borde, mayor es el tiempo de termalización. Más aún, los efectos de agregar carga en el sistema se hacen mas notables cuanto mayor es la separación en el borde. Por ejemplo, para  $\ell = 2$ , en el caso de la longitud geodésica, practicamente no se observan diferencias en el tiempo de termalización para

<sup>3</sup>Los resultados de esta subsección son reportados originalmente en [10], [12].

<sup>4</sup>El  $t_0$  de la figura 7.6 es el mismo  $t_f$  que se usó en esta tesis, además de la figura, el resto de esta subsección la obtuvimos de [11].

cualquier dimensión y carga. Sin embargo, para  $\ell = 3$ , las diferencias ya son más notables y en  $\ell = 4$  se hacen realmente apreciables. Más aún, en este último caso aparecen lo que en inglés se llaman *swallow tails* al final del proceso de termalización. Este fenómeno ya había sido reportado en [108] para la termalización de lazos de Wilson rectangulares en  $AdS_4$  con  $\mu = 0$  y también en casos en que la capa se mueve de manera cuasiestacionaria. Lo que sucede es que a determinados tiempos hay más de una geodésica que minimiza la acción. Esto quiere decir que hay que tomar con cuidado la aproximación de punto de ensilladura en la que solo nos quedamos con la de menor peso. Sin embargo, en [108] se argumenta que la aparición o no de este efecto depende, por ejemplo, de la dimensión del problema. Según los datos obtenidos en la tesis [11], este parece ser un fenómeno universal, que depende más bien de la penetración de la prueba en el interior del espacio AdS. Para pruebas lo suficientemente extensas aparece el fenómeno de *swallow tails* independientemente del tipo de prueba y de la dimensión del espacio-tiempo. Nuevamente, la mayor dimensión genera que las variaciones sean menores y esto lo podemos explicar en términos de la fracción de los modos perturbados con la capa como hicimos en el caso AdS-Vaidya sin carga.

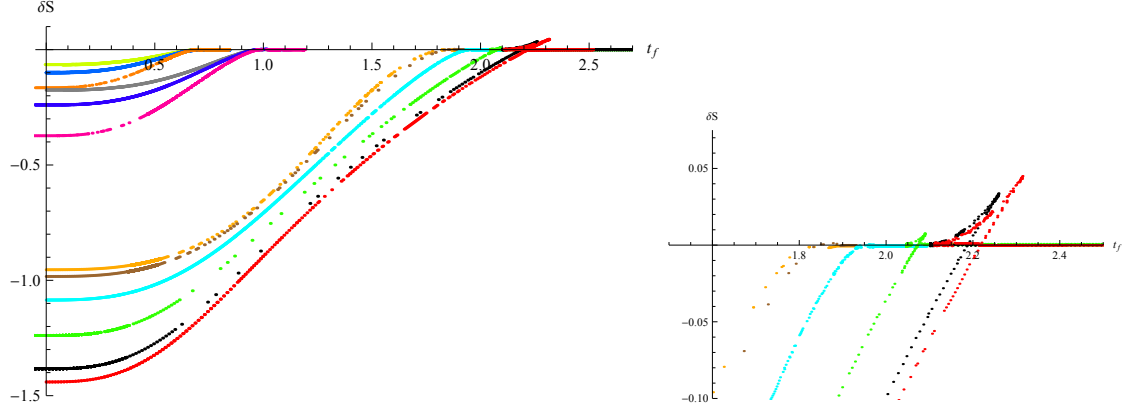


Figura 7.7: **Cargando** con  $\Delta t = 0$ . La figura de la izquierda tiene  $d = 3$ ,  $\ell = 1.4$ ,  $Q = 0, 1$ ,  $Q_{extremal}$  amarillo claro, azul claro, naranja.  $d = 3$ ,  $\ell = 2$ ,  $Q = 0, 1$ ,  $Q_{extremal}$  gris, azul y violeta respectivamente.  $\ell = 4$ ,  $d = 3$ ,  $Q = 0, 0.5, 1, 1.4, 1.65$ ,  $Q_{extremal}$  amarillo, marrón, celeste, verde negro, rojo respectivamente. La segunda figura corresponde a un zoom de  $\ell = 4$ ,  $d = 3$ ,  $Q = 0, 0.5, 1, 1.4, 1.65$ ,  $Q_{extremal}$  amarillo, marrón, celeste, verde negro, rojo respectivamente.

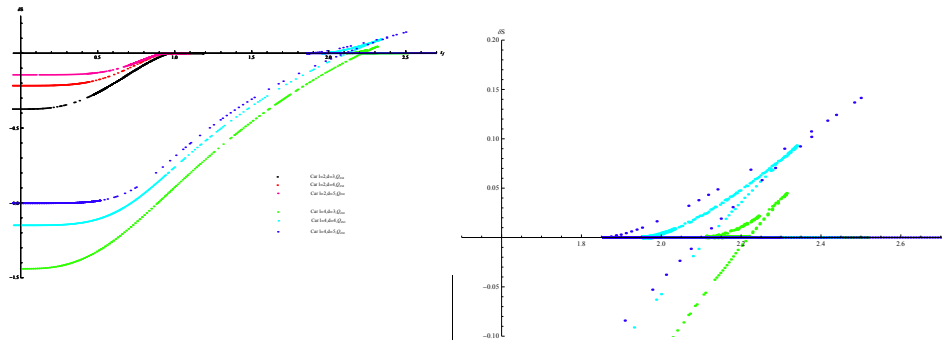


Figura 7.8: **Cargando**. Estas dos figuras están realizadas para una carga extremal del fondo a  $\Delta t = 0$ . La primera contiene los resultados para  $d = 3$ ,  $\ell = 2$  Negro,  $d = 4$ ,  $\ell = 2$  Rojo,  $d = 5$ ,  $\ell = 2$  rosa.  $d = 3$ ,  $\ell = 4$  verde,  $d = 4$ ,  $\ell = 4$  celeste,  $d = 5$ ,  $\ell = 4$  azul. La segunda corresponde a un zoom para la zona de termalización de  $d = 3$ ,  $\ell = 4$ ,  $d = 4$ ,  $\ell = 4$ ,  $d = 5$ ,  $\ell = 4$ .

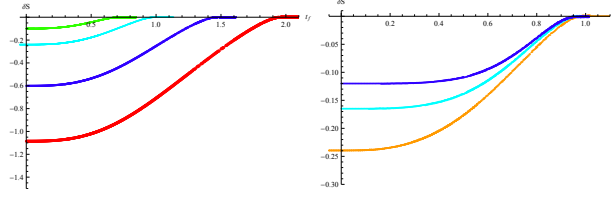


Figura 7.9: **Cargando**. Todas las figuras poseen  $\Delta t = 0$ . La primera tiene  $d = 3$ ,  $Q = 1$  y  $l=1.4, 2, 3, 4$  Verde, celeste, azul y rojo respectivamente. La segunda figura  $l = 2$ ,  $Q = 1$ ,  $d = 3, 4, 5$ . Azul  $d = 5$ , Celeste  $d = 4$ , amarillo  $d = 3$ .

## $q_E = 0$ , $\Delta t = 0$ descargando

En esta sección presentamos los resultados en el caso en el que el fondo se está descargando, esto se ve en la figura 7.10. En este tipo de fondos, existen determinados valores de carga y masa para los cuales las condiciones de energía se cumplen en todo el espacio-tiempo, en particular observando la ecuación (5.64) se cumplen cuando  $\hat{Q} < 0$  y  $Q_v > 0$ . Esas condiciones las conseguimos por ejemplo, en las ecuaciones (7.1) y (7.2), fijando  $Q_{in} < 0$ ,  $M_{in} = 1 + Q_{in}^2$ ,  $Q = 0$  y  $M > M_{in}$ .

Dado que es clave que la carga final sea cero, la única forma que tenemos de sondear si esta configuración aparece el *swallow tails*, es fijando  $Q_{in} = -Q_{ext}$  y por supuesto eligiendo un valor de  $\ell$  grande como fue en el caso en que el fondo se carga. Los resultados los podemos observar en la figura 7.10.

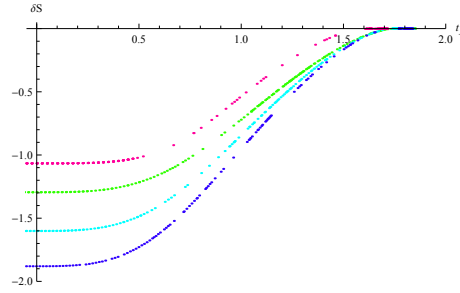


Figura 7.10: **Descargando**. Todas las figuras poseen  $\Delta t = 0$ . La curva verde esta obtenida con  $d = 3$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = -Q_{ext}$ ,  $M_i = 1 + Q_{in}^2$  y  $M = 5$ . La curva celeste esta obtenida con  $d = 3$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = -Q_{ext}$ ,  $M_{in} = 1 + Q_{in}^2$ ,  $Q = 0$  y  $M = 6$ . La curva azul esta obtenida con  $d = 3$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = -Q_{ext}$ ,  $M_{in} = 1 + Q_{in}^2$  y  $M = 7$ . La curva violeta esta obtenida con  $d = 4$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = -Q_{ext}$ ,  $M_{in} = 1 + Q_{in}^2$  y  $M = 6$ .

### 7.2.2. AdS-RN $q_E = 0$ , $\Delta t \neq 0$ Cargandose

En esta sección llegamos al momento previo a los calculos originales de esta tesis. Aunque los resultados de esta subsección no han sido reportados por nadie antes que nosotros, no muestran resultados muy diferentes (en lo cualitativo) a los alcanzados por [11], pero si son cruciales a la hora de poder realizar los cálculos con  $q_E \neq 0$  que mostraremos en la sección siguiente para poder realizar una comparación.

En consecuencia, en esta sección trabajaremos con  $q_E = 0$  y  $\Delta t \neq 0$ . Para esto partimos de un fondo AdS puro ( $T = \mu = 0$ ) y llegamos a un AdS-RN ( $T, \mu \neq 0$ ), y lo expresamos así

$$\hat{M} = \frac{M}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right), \quad (7.11)$$

$$\hat{Q} = \frac{Q}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right). \quad (7.12)$$



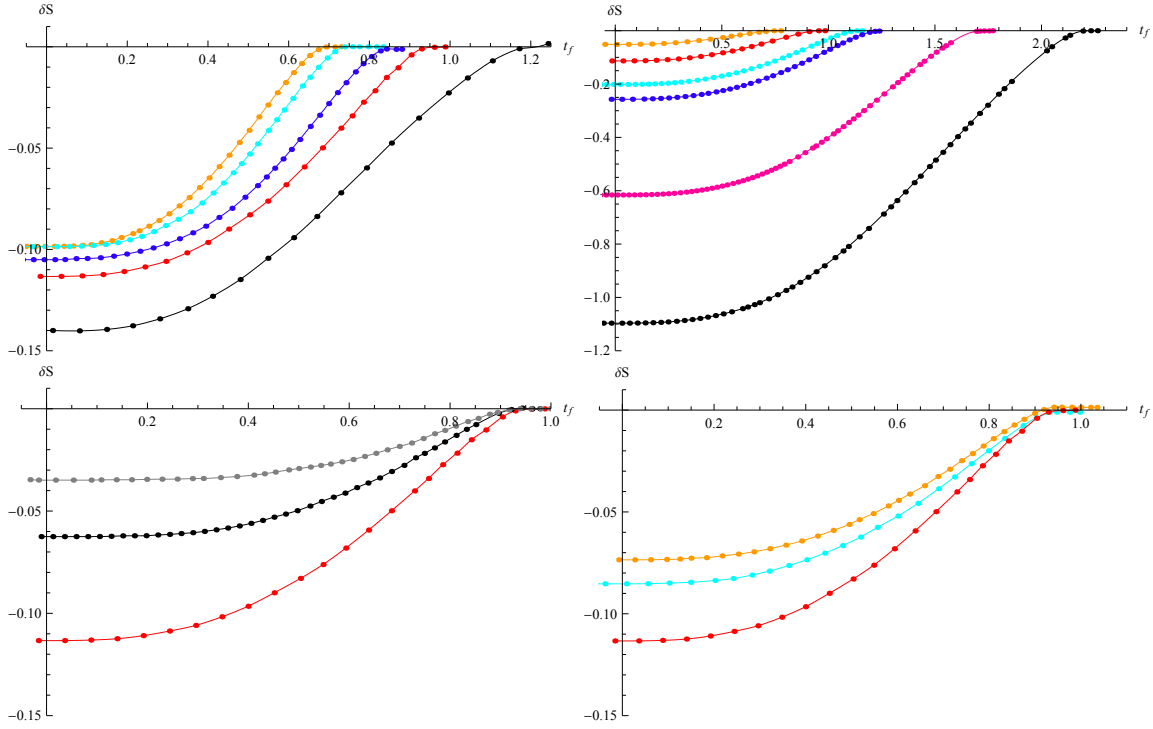


Figura 7.11:  $\Delta t \neq 0$ . Función de dos puntos para operadores sin carga como función de  $t_f$  para un quench en la masa y la carga cuando el sistema se esta cargando. *Izquierda arriba* : gráficas para  $d = 3$ ,  $\ell = 1.4$  y  $\Delta t = 0, 0.1, 0.3, 0.5, 1$  (naranja, celeste, azul, rojo y negro resp.). *Derecha arriba*: graficos para  $d = 3$ ,  $\Delta t = 0.5$ , y  $\ell = 1, 1.4, 1.8, 2, 3, 4$  (naranja, rojo, celeste, azul, violeta y negro resp.). *Izquierda abajo* : gráficas para  $\ell = 1.4$ ,  $\Delta t = 0.5$  y  $d = 3, 4, 5$  (rojo, negro y gris resp.). *Derecha abajo*: gráficas para  $d = 3$ ,  $\ell = 1.4$ ,  $\Delta t = 0.5$  y  $Q = 0, 0.5, 1$  (naranja, celeste y rojo resp.). En todos los casos comenzamos a partir de un AdS puro y pasamos AdSRN donde la masa y carga final son  $M = 1$  y  $Q = 1$ .

De figura 7.11 se desprenden los siguientes resultados:

- A  $\ell$ ,  $d$  y carga final  $Q$  fijas, a medida que  $\Delta t$  es más grande, mayor es el tiempo de termalización.
- A  $d$ ,  $\Delta t$  y carga final  $Q$  fijas, a medida que  $\ell$  es más grande, mayor es el tiempo de termalización.
- A  $\ell$ ,  $\Delta t$  y carga final  $Q$  fijas, a medida que cambia  $d$  no se observa un gran cambio en el tiempo de termalización.
- A  $\ell$ ,  $\Delta t$  y  $d$  fijos, a medida que cambia  $Q$  no se observa un gran cambio en el tiempo de termalización.
- Al igual que en el caso con  $\Delta t = 0$ , cuando tenemos presente  $\Delta t \neq 0$ ,  $\ell$  grande y la carga final  $Q$  del fondo es cercana a la extremal o directamente la extremal, nuevamente aparece el *swallow tale*. Esto lo vemos en la figura 7.12 y donde también se observa que no depende de la dimensión, es decir, el *swallow tale* aparece en  $d = 3$  y  $d = 4$ . Siendo la razón de esta aparición la misma que mencionamos en la sección 7.2.1. Otra dato importante a mencionar es que a medida que aumenta la dimensión, este efecto se hace más importante.

Como se podía esperar, dado que estamos probando el sistema con operadores escalares sin carga ( $q_E = 0$ ), la carga del fondo  $\hat{Q}$  tiene un efecto pequeño en la forma de las curvas de termalización. El fenómeno de *top-down thermalization* está otra vez presente, y el tiempo de termalización disminuye con la dimensión de la teoría de campos como en el caso anterior y vemos que el *swallow tails* se hace mas importante a mayor dimensión. Los resultados se presentan en [11] y están de acuerdo con los de la referencia [101] cuando hacemos  $\Delta t = 0$ .

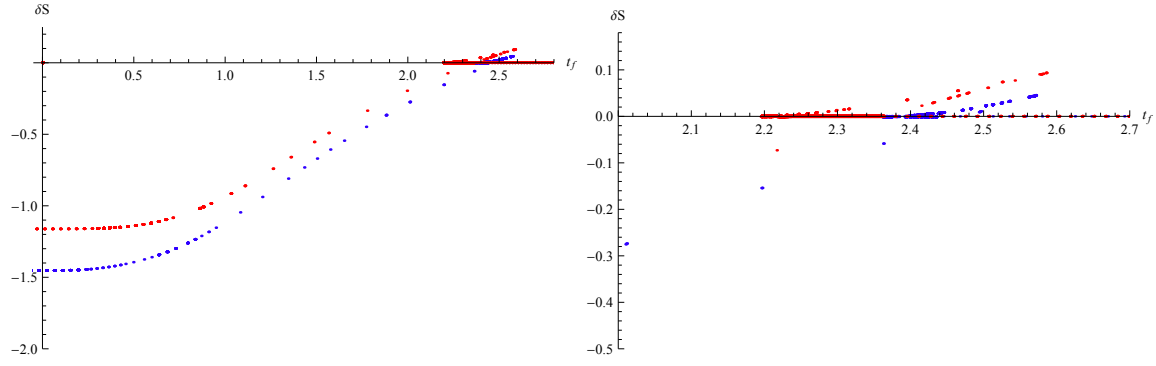


Figura 7.12:  $\Delta t = 0.5$ . Función de dos puntos para operadores sin carga como función de  $t_f$  para un *quench* en la masa y la carga cuando el sistema se esta cargando. Gráficos para  $\Delta t=0.5$ ,  $\ell = 4$ ,  $d = 3$  y  $d = 4$  (azul y rojo respectivamente). En todos los casos comenzamos a partir de un AdS puro y pasamos AdS-RN donde la masa y carga final son  $M = 1$  y la carga  $Q = Q_{ext}$  correspondiente a la dimensión.

## Estudio de la función de dos puntos a tiempos diferentes de un operador escalar cargado

En esta sección presentaremos algunos de los cálculos originales de la tesis. En las proximas tres subsecciones (7.2.3, 7.2.4 y 7.2.5) estará presente esto. Estudiaremos un campo escalar clásico cargado que vive en el *bulk*, que es fuente de un operador escalar cargado en la teoría de campos que está en el borde. En particular calcularemos la función de correlación de dos puntos para dicho campo.

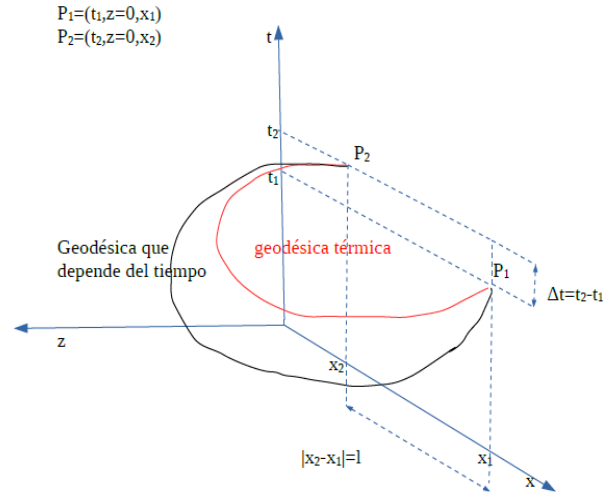


Figura 7.13:

Para tener una intuición de lo que estamos queriendo representar, esquemáticamente, la teoría de campos que se está describiendo tiene la forma de (4.107). Por otro lado, en la figura 7.13 vemos como serán las geodésicas que usaremos para estudiar este tipo de procesos.

### 7.2.3. Fondo AdS-RN a carga constante, con $q_E \neq 0$ y $\Delta t \neq 0$ .

Como dijimos, empecemos estudiando el proceso de termalización de la función de dos puntos de un operador escalar cargado en donde la carga del fondo es constante, pero el *quench* lo realizamos en la temperatura y en el potencial químico. Esto es, consideramos a  $\hat{M}$  y  $\hat{Q}$  como

$$\hat{M} = \frac{M - M_{\text{in}}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + M_{\text{in}}, \quad (7.13)$$

$$\hat{Q} = Q_{\text{in}}. \quad (7.14)$$

Este fondo interpola un agujero negro AdS-RN de masa  $M_{\text{in}}$  y carga  $Q_{\text{in}}$  para  $v \ll v_0$ , con un agujero negro AdS-RN en  $v \gg v_0$ , con  $(M > M_{\text{in}})$ , manteniendo la carga constante, siendo esta  $Q_{\text{in}}$ . A continuación elegimos reescalar la coordenada  $z$  de manera tal de tener  $M_{\text{in}} = 1 + Q_{\text{in}}^2$  en  $v \ll v_0$ . Esto garantiza que el fondo satisface (5.40) para  $v \ll v_0$ , y ya que cuando  $v$  aumenta la masa también aumenta mientras se mantiene la constante de carga, (5.64) se sigue satisfaciendo. Notemos que aunque la carga del fondo es constante, el potencial químico cambia cuando le inyectamos energía al sistema. La razón para esto es que deberíamos demandar regularidad al realizar una rotación euclídea en la geometría (ver la discusión después de la ecuación (5.66)). En consecuencia elegimos un perfil para el potencial químico de la forma

$$\hat{\mu} = \frac{\mu - \mu_{\text{in}}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + \mu_{\text{in}}, \quad (7.15)$$

con

$$\mu_{\text{in}} = \gamma Q_{\text{in}}, \quad \mu = \gamma Q_{\text{in}} z_h^{d-2}, \quad (7.16)$$

donde  $z_h < 1$  es la posición del horizonte después del *quench*. La posición inicial es  $z_{\text{in}} = 1$  debido a la condición  $M_{\text{in}} = 1 + Q_{\text{in}}^2$ . Notemos que durante el *quench* el valor absoluto del potencial químico se reduce, pero no llega a ser cero.

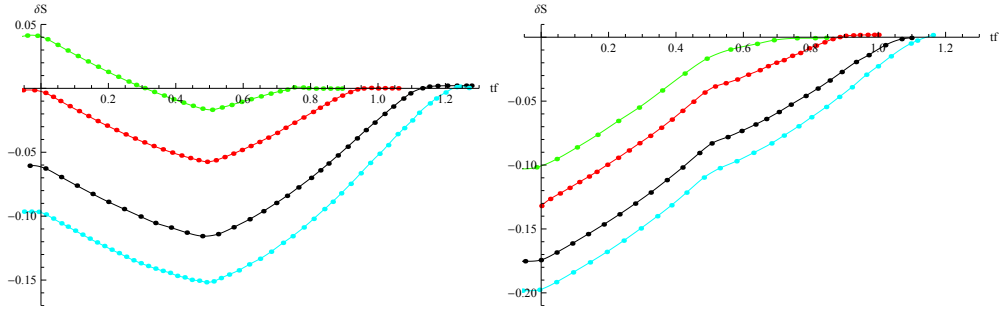


Figura 7.14: Función de dos puntos de un operador escalar cargado como función de  $t_f$  para un *quench* en la temperatura y el potencial químico, modelado por una interpolación entre  $M_{\text{in}} = 1 + Q_{\text{in}}^2$  en el pasado, y  $M = 3$  en el futuro, manteniendo la carga constante  $Q = Q_{\text{in}} = 1$ . Los gráficos corresponden a  $d = 3$ ,  $\Delta t = 0.5$  y  $\ell = 1, 1.4, 1.8, 2$  (verde, rojo, negro y celeste and azure resp.) Izquierda:  $q_E = 1$ . Derecha:  $q_E = -1$ .

De la figura 7.14 a la 7.17 se muestran los resultados correspondientes a una interpolación entre  $M_{\text{in}} = 2$  y  $M = 3$  con  $Q_{\text{in}} = 1$ . En las figuras 7.14 y 7.15 vemos que el tiempo de termalización se incrementa con  $\ell$  y  $\Delta t$  respectivamente, mostrando otra vez el efecto *top-down thermalization*, y la figura 7.16 muestra que el tiempo de termalización se incrementa con la dimensión. Finalmente en la figura 7.17 vemos que, para un potencial químico positivo, el tiempo de termalización de operadores cargados crece con la carga  $q_E$  de dicho operador, este es un resultado esperado de la perspectiva de la teoría de gauge.

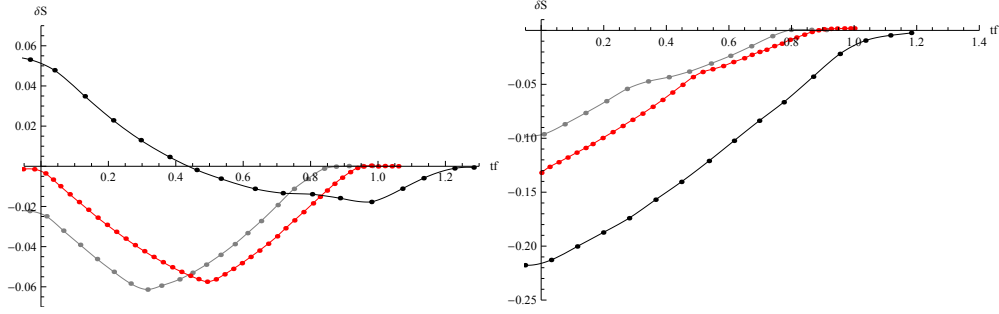


Figura 7.15: Función de dos puntos de un operador escalar cargado como función de  $t_f$  para un *quench* en la temperatura y el potencial químico, modelado por una interpolación entre  $M_{\text{in}} = 1 + Q_{\text{in}}^2$  en el pasado, y  $M = 3$  en el futuro, manteniendo la carga constante  $Q = Q_{\text{in}} = 1$ . Los gráficos corresponden a  $d = 3$ ,  $\ell = 1.4$  y  $\Delta t = 0.3, 0.5, 1$  (gris, rojo y negro resp.). *Izquierda*:  $q_E = 1$ . *Derecha*:  $q_E = -1$ .

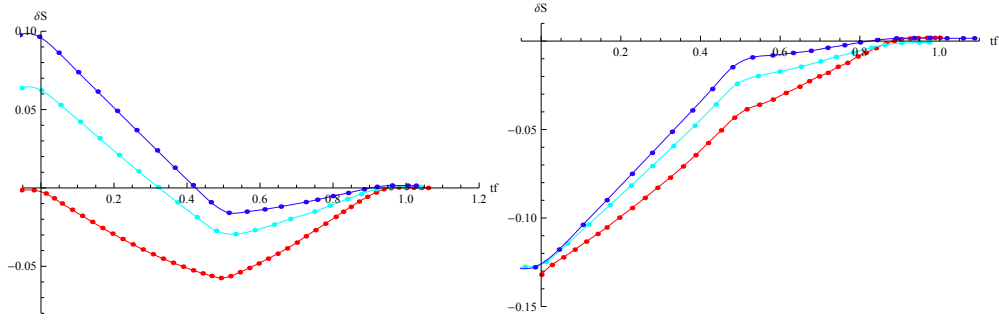


Figura 7.16: Función de dos puntos de un operador escalar cargado como función de  $t_f$  para un *quench* en la temperatura y el potencial químico, modelado por una interpolación entre  $M_{\text{in}} = 1 + Q_{\text{in}}^2$  en el pasado, y  $M = 3$  en el futuro, manteniendo la carga constante  $Q = Q_{\text{in}} = 1$ . Los gráficos corresponden a  $\ell = 1.4$ ,  $\Delta t = 0.5$  y  $d = 3, 4, 5$  (rojo, celeste, azul resp.). *Izquierda*:  $q_E = 1$ . *Derecha*:  $q_E = -1$ .

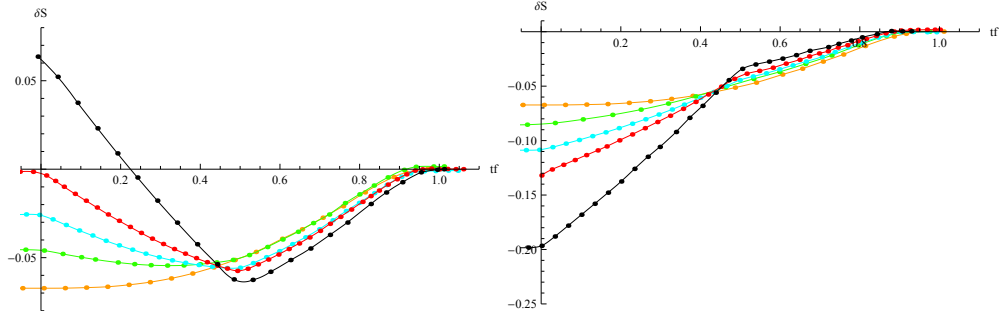


Figura 7.17: Función de dos puntos de un operador escalar cargado como función de  $t_f$  para un *quench* en la temperatura y el potencial químico, modelado por una interpolación entre  $M_{\text{in}} = 1 + Q_{\text{in}}^2$  en el pasado, y  $M = 3$  en el futuro, manteniendo la carga constante  $Q = Q_{\text{in}} = 1$ . Los gráficos corresponden a  $d = 3$ ,  $\ell = 1.4$ ,  $\Delta t = 0.5$  y  $|q_E| = 0, 0.3, 0.65, 1, 2$  (amarillo, verde, celeste, rojo y negro resp.). *Izquierda*:  $q_E > 0$ . *Derecha*:  $q_E < 0$ .

Una característica peculiar que aparece en todas las figuras: es un pico que está en un  $t_f$  donde la derivada de  $\delta S$  con respecto a  $t_f$  tiene un rápido cambio. Esto puede ser entendido con la ayuda de la figura 7.15,

donde es evidente que el pico aparece para  $t_f \simeq \Delta t$ . En efecto, cada punto  $t_f$  en la curva representa una geodésica que, recordando nuestras condiciones de contorno (6.2), comienza en el borde en  $t_i = t_f - \Delta t$  y terminan en  $t = t_f > 0$ . Dado que la cáscara entra al espacio a  $t = 0$ , trayectorias *tempranas* que comienzan a tiempos menores que  $(t_f < \Delta t)$ , cruzan la cáscara de materia una sola vez con el fin de volver a la frontera. Por otro lado, trayectorias *tardías* que tienen  $(t_f > \Delta t)$  cruzan la cáscara de materia ya sea 2 veces, o no lo cruzan, este último caso corresponde a una situación termalizada (ver Fig.6.1). Esas tres clases de trayectorias sondan el espacio-tiempo de maneras diferentes. Vamos a asumir primero que  $\hat{Q}q_E > 0$ , luego, para trayectorias *tempranas*, la fuerza gravitacional del fondo compite con la interacción electromagnética durante la primera parte de la trayectoria (cerca a  $t = t_f - \Delta t$ ), después de que la partícula cruza la cáscara y las dos fuerzas empujan en la misma dirección (cerca de  $t = t_f$ ). Para trayectorias *tardías*, las dos fuerzas compiten solamente cerca del tip de la trayectoria, y cooperan en ambos extremos, cerca de  $t = t_f - \Delta t$  y  $t = t_f$ . Finalmente, en el tercer caso las fuerzas cooperan a lo largo de toda la trayectoria. El mismo razonamiento podemos utilizar para el caso donde  $\hat{Q}q_E < 0$ , con las regiones donde las fuerzas compiten o cooperan intercambiadas. Esto puede ser visualizado en las figuras 6.1 y 6.2, en las que los tres tipos de geodésicas son mostradas. La ausencia de picos para el caso donde la carga de prueba es cero, es otra evidencia de su relación con la interacción electromagnética.

Como podemos ver en la figura 7.17, hay una característica adicional notable en los gráficos: existe un valor de  $t_f$  tal que la función  $\delta S$  no depende del valor de la carga de prueba  $q_E$ . Nosotros no tenemos explicación para este comportamiento por el momento.

#### 7.2.4. Fondo AdS-RN descargandose, con $q_E \neq 0$ y $\Delta t \neq 0$ .

Para estudiar un fondo del tipo descrito en la sección 5.4.2 que se esta descargando, necesitamos elegir  $|Q| < |Q_{\text{in}}|$ . Para fines ilustrativos, tomaremos el caso extremo  $Q = 0$  con las funciones  $\hat{M}$  y  $\hat{Q}$  de la forma

$$\hat{M} = \frac{M - M_{\text{in}}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + M_{\text{in}}, \quad (7.17)$$

$$\hat{Q} = -\frac{Q_{\text{in}}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + Q_{\text{in}}. \quad (7.18)$$

Esas funciones interpolan entre un agujero negro AdS-RN con masa  $M_{\text{in}}$  y carga  $Q_{\text{in}}$  para  $v \ll v_0$ , con agujero negro AdS-RN con masa  $M$  y sin carga para  $v \gg v_0$ . Nuevamente reescalamos la coordenada radial para que  $M_{\text{in}} = 1 + Q_{\text{in}}^2$  en el estado inicial. En el estado final, la desigualdad (5.40) se cumple ya que la carga es cero. Desde el punto de vista dual, estamos modelando un proceso de rápido decrecimiento del valor absoluto del potencial químico mientras es inyectada energía al sistema.

Los resultados son mostrados en las figuras 7.18 a 7.21. Otra vez, vemos aparece el *top-down thermalization* y que el tiempo de termalización aumenta con  $\ell$ ,  $\Delta t$  y con la dimensión del espacio. El pico en  $t_f = \Delta t$  también está presente, y la razón es la misma que explicamos en la sección previa.

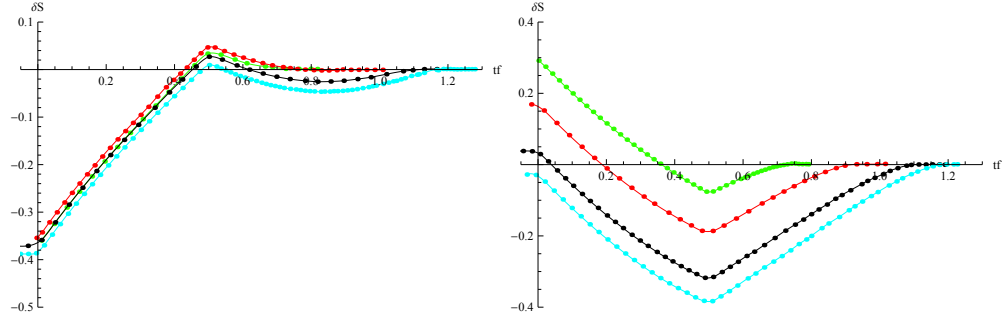


Figura 7.18: Función de correlación de dos puntos de un operador escalar cargado como función del tiempo  $t_f$  para un *quench* térmico del potencial químico donde el fondo se esta descargando. Los gráficos corresponden a  $d = 3$ ,  $\Delta t = 0.5$  y  $\ell = 1, 1.4, 1.8, 2$  ( verde, rojo, negro y celeste resp.). *Izquierda*:  $q_E = 1$ . *Derecha*:  $q_E = -1$ . En las Figs. 7.18-7.21, la geometría interpola entre un AdS-RN con  $M_{\text{in}} = 1 + Q_{\text{in}}^2$ ,  $Q_{\text{in}} = -1$ ,  $Q = 0$  y AdS puro con  $M = 3$ .

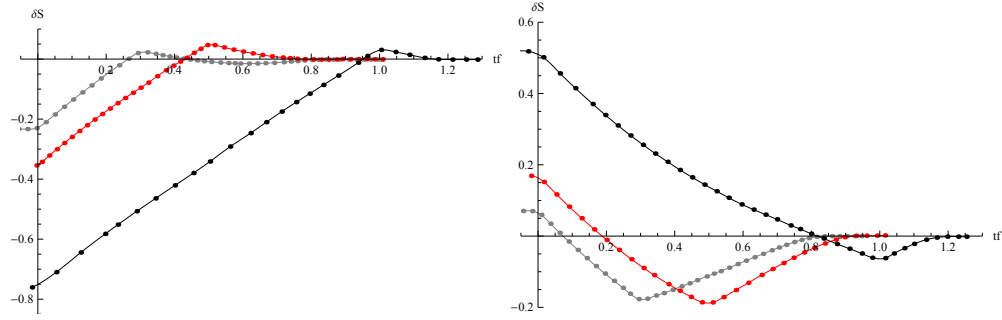


Figura 7.19: Función de correlación de dos puntos de un operador escalar cargado como función del tiempo  $t_f$  para un *quench* térmico del potencial químico donde el fondo se esta descargando. Los gráficos corresponden a  $d = 3$ ,  $\ell = 1.4$  y  $\Delta t = 0.3, 0.5, 1$  (gris, rojo y negro resp.). *Izquierda*:  $q_E = 1$ . *Derecha*:  $q_E = -1$ .

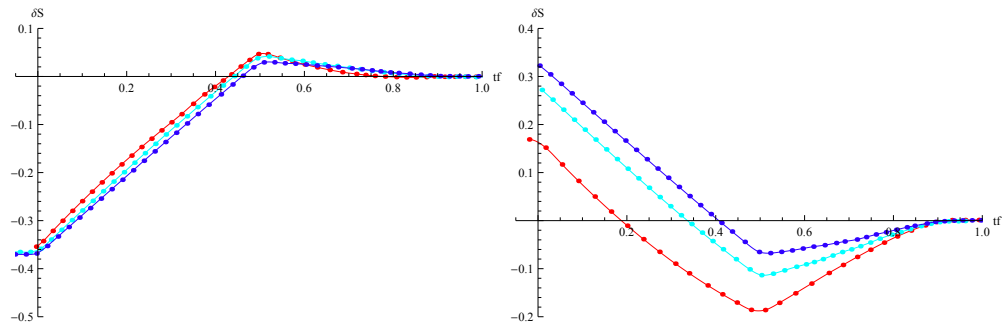


Figura 7.20: Función de correlación de dos puntos de un operador escalar cargado como función del tiempo  $t_f$  para un *quench* térmico del potencial químico donde el fondo se esta descargando. Los gráficos corresponden a  $\ell = 1.4$ ,  $\Delta t = 0.5$  y  $d = 3, 4, 5$  (rojo, celeste y azul resp.). *Izquierda*:  $q_E = 1$ . *Derecha*:  $q_E = -1$ .

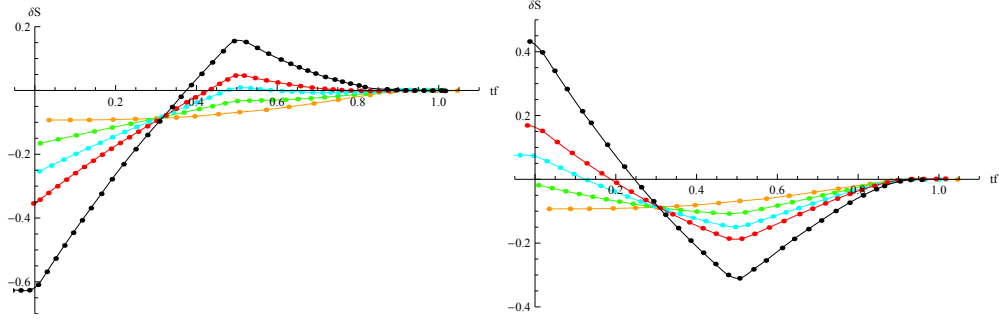


Figura 7.21: Función de correlación de dos puntos de un operador escalar cargado como función del tiempo  $t_f$  para un *quench* térmico del potencial químico donde el fondo se está descargando. Los gráficos corresponden a  $d = 3$ ,  $\ell = 1.4$ ,  $\Delta t = 0.5$  y  $|q_E| = 0, 0.3, 0.65, 1, 2$  (naranja, verde, celeste, rojo y negro resp.). *Izquierda:*  $q_E > 0$ . *Derecha:*  $q_E < 0$ .

### 7.2.5. Fondo AdS-RN cargandose, con $q_E \neq 0$ y $\Delta t \neq 0$ .

Concluimos esta parte de la tesis de resultados originales, analizando el proceso de termalización en el que el *quench* se da tanto en la masa como en la carga del agujero negro, pero donde esta vez se incrementan tanto la temperatura como el potencial químico (este caso ha sido analizado anteriormente en [10],[11] para el caso de operadores escalares sin carga). Las funciones  $\hat{M}$  y  $\hat{Q}$  toman la forma

$$\hat{M} = \frac{M}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right), \quad (7.19)$$

$$\hat{Q} = \frac{Q}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right). \quad (7.20)$$

Esas funciones interpolan entre un AdS puro para  $v \ll v_0$ , con agujero negro AdS-RN con masa  $M$  y carga  $Q$  para  $v \gg v_0$ . Reescalamos la coordenada radial para que tengamos  $M = 1 + Q^2$  en el estado final. Desde el punto de vista dual, como entra energía dentro del sistema, el valor absoluto del potencial químico aumenta rápidamente. Como se discutió en la sección 5.5.2, en este caso la condición de energía es violada en la región IR, en consecuencia siempre chequeamos que las geodésicas no toquen ese sector (ver Fig. 6.3).

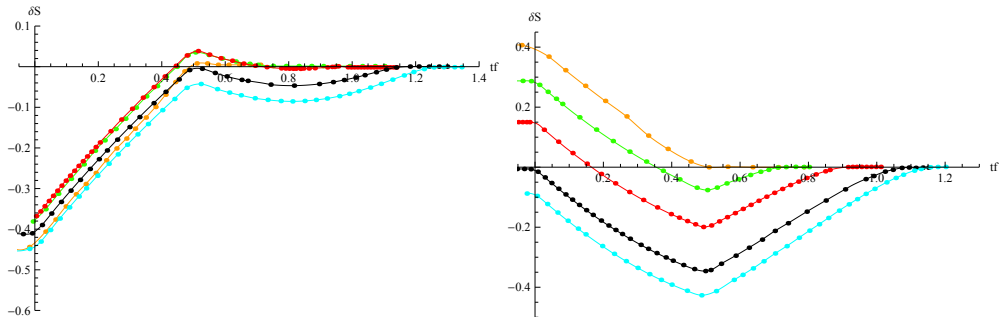


Figura 7.22: Función de correlación de dos puntos de un operador escalar cargado correspondiente a un fondo que se está cargando como función de  $t_f$ , para un *quench* tanto en la temperatura como para el potencial químico. Los gráficos corresponden a  $d = 3$ ,  $\Delta t = 0.5$  y  $\ell = 1, 1.4, 1.8, 2$  (naranja, verde, rojo, negro y celeste resp.). La geometría interpola entre AdS puro y AdS-RN con  $M = 1 + Q^2$  y  $Q = 1$ . *Izquierda:*  $q_E = 1$ . *Derecha:*  $q_E = -1$ .

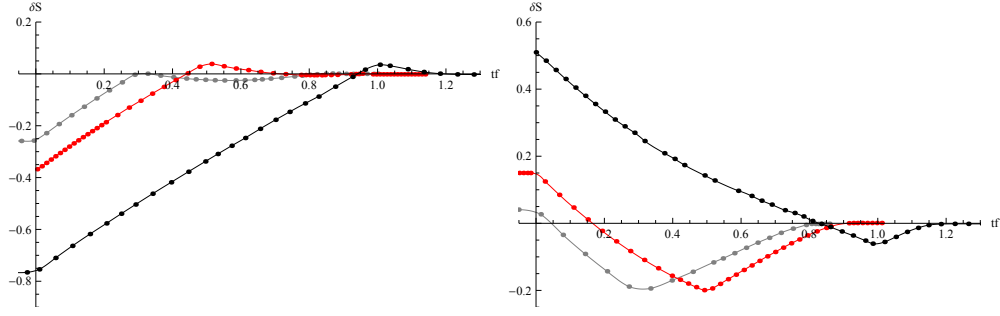


Figura 7.23: Función de correlación de dos puntos de un operador escalar cargado correspondiente a un fondo que se está cargando como función de  $t_f$ , para un *quench* tanto en la temperatura como para el potencial químico. Los gráficos corresponden a  $d = 3$ ,  $\ell = 1.4$ ,  $\Delta t = 0.3, 0.5, 1$  (gris, rojo y negro resp.). *Izquierda*:  $q_E = 1$ . *Derecha*:  $q_E = -1$ .

Los resultados se muestran a partir de la figura 7.22 hasta 7.25, con características similares a los caso previos, como son *top-down thermalization*, el incremento del tiempo de termalización con la dimensión del espacio, el pico denotando la transición entre los diferentes clases de geodésicas, etc.

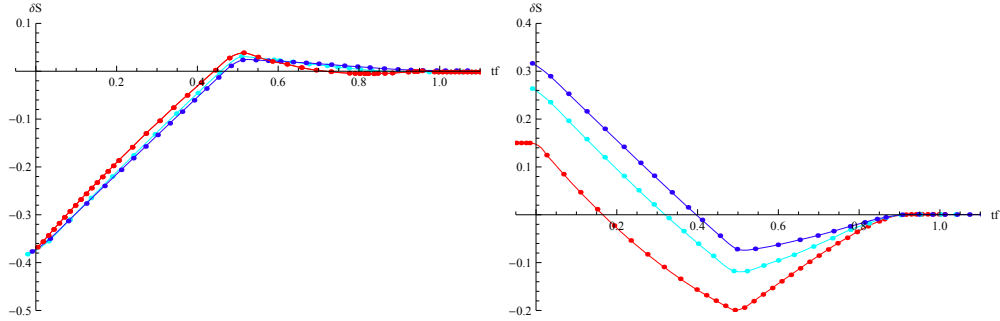


Figura 7.24: Función de correlación de dos puntos de un operador escalar cargado correspondiente a un fondo que se está cargando como función de  $t_f$ , para un *quench* tanto en la temperatura como para el potencial químico. Los gráficos corresponden a  $d = 3, \ell = 1.4$  y  $\Delta t = 0.5$  para  $d = 3, 4, 5$  (rojo, celeste y azul resp.). *Izquierda*:  $q_E = 1$ . *Derecha*:  $q_E = -1$ .

Vale la pena mencionar que la estructura de *swallow tale* encontrado en [11] también aparece cuando la carga de prueba es distinta de cero como podemos ver en la figura 7.26.



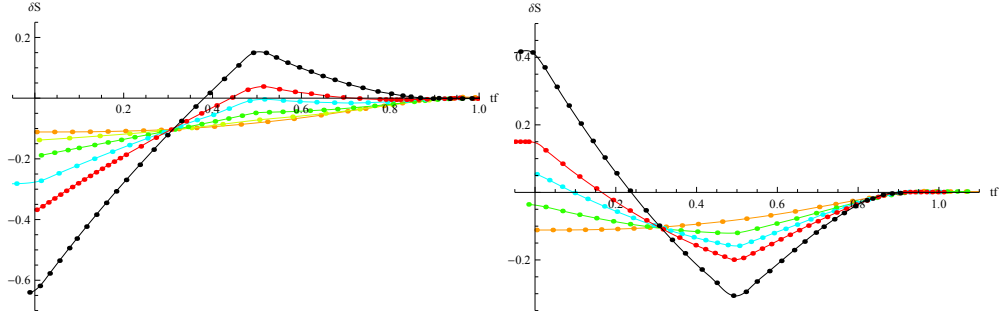


Figura 7.25: Función de correlación de dos puntos de un operador escalar cargado correspondiente a un fondo que se está cargando como función de  $t_f$ , para un *quench* tanto en la temperatura como para el potencial químico. Los gráficos corresponden a  $d = 3$ ,  $\ell = 1.4$  y  $\Delta t = 0.5$ . *Izquierda*:  $q_E = 0, 0.1, 0.3, 0.65, 1, 2$  (naranja, amarillo claro, verde, celeste, rojo, negro resp.) *Derecha*:  $-q_E = 0, 0.3, 0.65, 1, 2$  (naranja, verde, celeste, rojo y negro resp.).

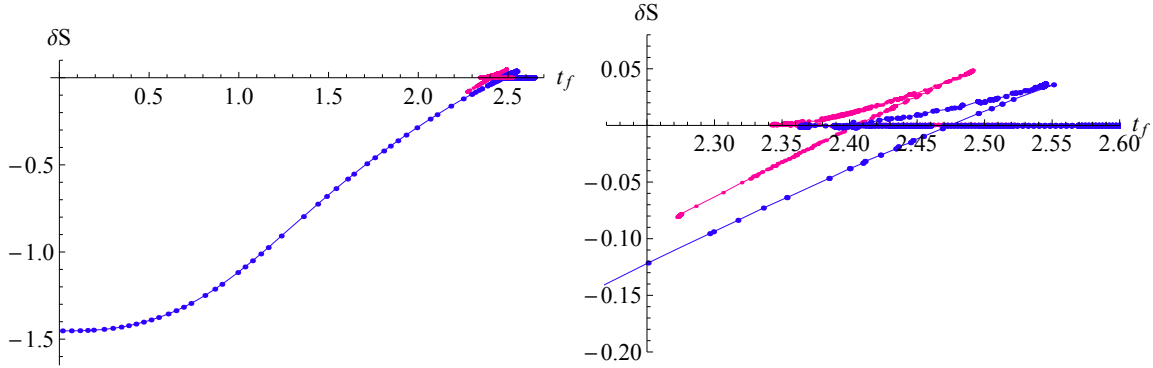


Figura 7.26: Función de correlación de dos puntos de un operador escalar cargado correspondiente a un fondo que se está cargando como función de  $t_f$ , para un *quench* tanto en la temperatura como para el potencial químico. En esta oportunidad vemos al caso extremo. Los gráficos corresponden a  $d = 3$ ,  $M = 1 + Q^2$ ,  $Q = \sqrt{3}$ ,  $\ell = 4$ ,  $\Delta t = 0.5$  y  $q_E = 0, 0.5$  (azul y violeta resp.). Aquí nuevamente la geometría interpola entre AdS puro y AdS-RN. Sobre el lado derecho se encuentra un zoom de la región del *swallow tale*.

### 7.3. Estudio de la función de dos puntos en un fondo de AdS-GB-BH

En esta sección estamos interesados en fondos de Gauss-Bonnet, ya que con este tipo de fondo podemos obtener correcciones en el IR de la teoría de campos dual. Es decir, queremos estudiar la evolución en el tiempo de la función de dos puntos en este tipo fondo. Primero estudiaremos la función de dos puntos a partir de geodésicas en un fondo de AdS-GB donde se forma un agujero negro sin carga. Luego cambiaremos el fondo, por un AdS-GB-RN donde estudiaremos geodésicas sin carga y con carga.

Nuevamente el modelo para la masa y carga que curva el espacio-tiempo serán

$$\hat{M} = \frac{M - M_{\text{in}}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + M_{\text{in}} \quad (7.21)$$

$$\hat{Q} = \frac{Q - Q_{\text{in}}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + Q_{\text{in}} \quad (7.22)$$

En consecuencia, como dijimos en la sección 6.2 graficaremos  $\delta S_{on-shell}$  como función de  $t_f$  para un dado  $\Delta t$ , dimensión,  $Q_{in}$ ,  $Q$ ,  $M_{in}$ ,  $M$ ,  $q_E$  y  $\ell$ .

### 7.3.1. AdS-GB $\Delta t = 0$ $Q = 0$ .

Comencemos estudiando el caso en que el fondo comienza con  $Q_{in} = 0$  y  $Q = 0$ . Esto implica que 7.21 y 7.22 tomen la forma de

$$\hat{M} = \frac{M - M_{in}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + M_{in}, \quad (7.23)$$

$$\hat{Q} = 0. \quad (7.24)$$

En las figuras (7.27), (7.28) y (7.29) mostramos los resultados obtenidos de la función de dos puntos como función del  $t_f$ , para  $\Delta t = 0$ . Para  $d$  y  $\ell$  fijo a medida que disminuye  $\alpha$ , el tiempo de termalización aumenta. En estas condiciones al disminuir  $\alpha$  las geodésicas penetran menos hacia adentro del espacio AdS, en consecuencia, a medida que  $v_*$  aumenta el valor del  $z_*$  va disminuyendo. Teniendo fijos a  $d$  y  $\alpha$ , y variando  $\ell$ , los

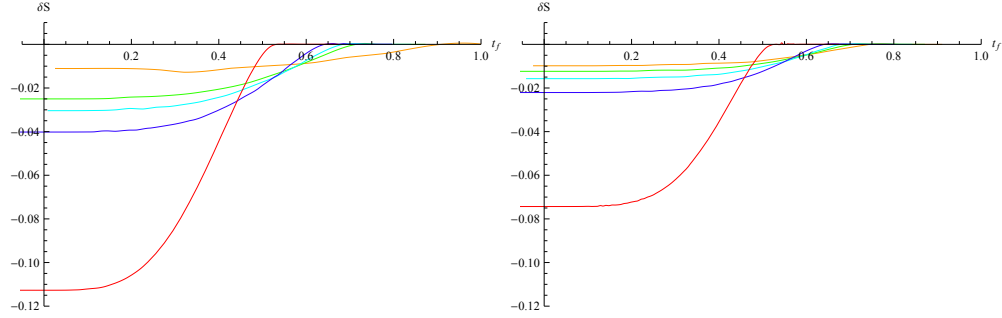


Figura 7.27: En la figura de la izquierda todas las curvas tienen  $\Delta t = 0$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $M_{in} = 0$  y  $M = 1$ .  $l=1.4$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = -1, -0.1, 0, 0.1, 0.24$ . Amarillo, verde, celeste, azul y rojo respectivamente. En la figura de la derecha  $\Delta t = 0$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $M_{in} = 0$  y  $M = 1$ .  $l=1.4$ ,  $d = 5$ ,  $\alpha = -0.24, -0.1, 0, 0.1, 0.24$ . Amarillo, verde, celeste, azul y rojo respectivamente.

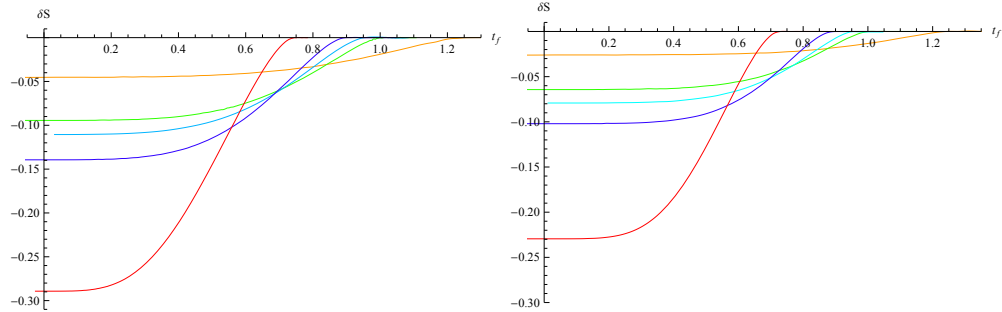


Figura 7.28: En la figura de la izquierda todas las curvas tienen  $\Delta t = 0$ ,  $Q = 0$ .  $l = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = -1, -0.1, 0, 0.1, 0.24$ . gris, marron, celeste, violeta y negro respectivamente. En la figura de la derecha  $\Delta t = 0$ ,  $Q = 0$ .  $l = 2$ ,  $d = 5$ ,  $\alpha = -1, -0.1, 0, 0.1, 0.24$ . Amarillo, verde, celeste, azul y rojo respectivamente.

modos que termalizan primero son los que tienen  $\ell$  más chico. Esto quiere decir que cuanto más cerca estén los puntos del borde de donde empieza y termina la geodésica, más rápido el sistema llega al equilibrio. Estos resultados obtenidos están de acuerdo con los publicados en [112], [113], [114]. En la figura 7.29 vemos que para  $\alpha$  y  $\ell$  fijos, a mayor dimensión el tiempo de termalización es menor. Cabe destacar que para  $\ell$  grande y cuando  $\alpha$  es negativo comienza a observarse una especie de *swallos tails*, que se incrementa el efecto cuanto más negativo es el factor de GB  $\alpha$ . Como podemos observar en las figuras 7.27, 7.28 este efecto no aparece.

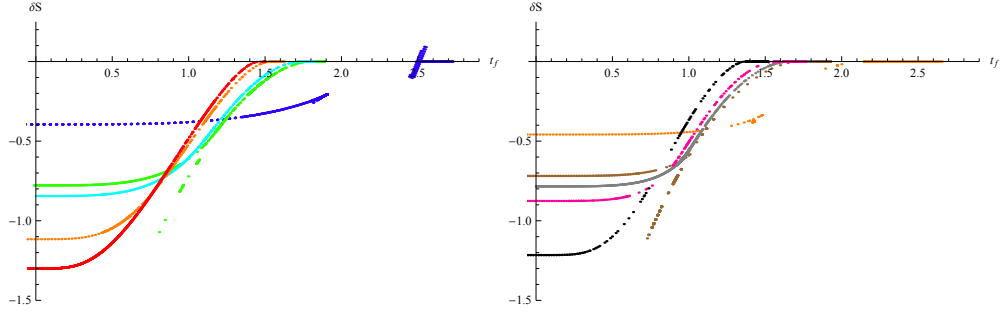


Figura 7.29: En la figura de la izquierda todas las curvas tienen  $\Delta t = 0$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $l = 4$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = -2, -0.19, 0, 0.2, 0.24$ . Azul, verde, celeste, naranja y rojo respectivamente. En la figura de la derecha  $\Delta t = 0$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $l = 4$ ,  $d = 5$ ,  $\alpha = -1, -0.1, 0, 0.1, 0.24$ . Amarillo, marrón, gris, violeta y negro respectivamente.

### 7.3.2. AdS-GB-RN con $\Delta t = 0$ , $Q \neq 0$

Ahora vamos a estudiar un fondo AdS-GB-RN<sup>5</sup> que al igual que en la sección 7.2.1, usaremos el modelo (7.21) y (7.22) para el *quench*, donde  $M = 1 + Q^2$ ,  $Q_{in} = 0$  y  $M_{in} = 0$ . En consecuencia, primero estudiemos el caso en que el fondo comienza con  $Q_{in} = 0$  y termina con  $Q \neq 0$ , además de tener  $\Delta t = 0$  entre los puntos del borde. En estas condiciones (7.21) y (7.22) toman la forma

$$\hat{M} = \frac{M}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right), \quad (7.25)$$

$$\hat{Q} = \frac{Q}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right). \quad (7.26)$$

En la figura 7.30 mostramos los resultados obtenidos de la función de dos puntos como función de  $t_f$ . Para  $d$ , y  $\ell$  fijo a medida que disminuye  $\alpha$ , observamos que el tiempo de termalización aumenta. En estas condiciones, al disminuir  $\alpha$ , las geodésicas se meten menos hacia adentro del espacio AdS. Por otro lado, a medida que  $v_*$  aumenta, el valor del  $z_*$  va disminuyendo.

Manteniendo fijos  $d$ , y  $\alpha$ , y variando  $\ell$ , los modos que termalizan primero son los que tienen  $\ell$  más chico. Esto quiere decir que cuanto más cerca estén los puntos del borde de donde empieza y termina la geodésica, más rápido llega al equilibrio el sistema.

Observamos en la figura 7.31 que el *swallow tail* no depende de la dimensión, ya que aparece en  $d = 4$  y en  $d = 5$ . Pero sí podemos decir que depende de la carga final del fondo, dado que a medida que empieza a aumentar esta, el fenómeno del *Swallow tail* se hace más notorio. Podemos decir que el fenómeno del *Swallow tail* en la función de dos puntos básicamente depende de 3 factores: 1) de  $\ell$ , 2) de que tan cerca este la carga final del fondo de la carga extremal, 3) de  $\alpha$ . Encontramos que para  $\ell$  chico y carga  $Q = 0$  no se observa. Para  $\ell$  chico y carga  $Q = Q_{ext}$  no aparece. Luego vemos que para  $\ell$  grande y carga  $Q = 0$  tampoco aparece, pero a medida que vamos aumentando la carga final  $Q$  y nos acercamos a la carga extremal comienza aparecer. Por otro lado, obtuvimos que en fondos AdS-GB-RN cuando la carga final es extremal o cercana, el hecho que  $\alpha$  sea lo más grande posible hace que el *Swallow tail* sea más relevante. Otro resultado que se mantiene, es el siguiente: cuando tenemos  $\ell$  grande, y  $Q$  cercana al valor extremal, estamos en los regímenes para los cuales esta presente el *Swallow tail*. En esta situación lo que obtenemos es que el tiempo de termalización es menor cuanto más grande es  $\alpha$ .

<sup>5</sup>Estos resultados obtenidos son similares a los publicados en [102].

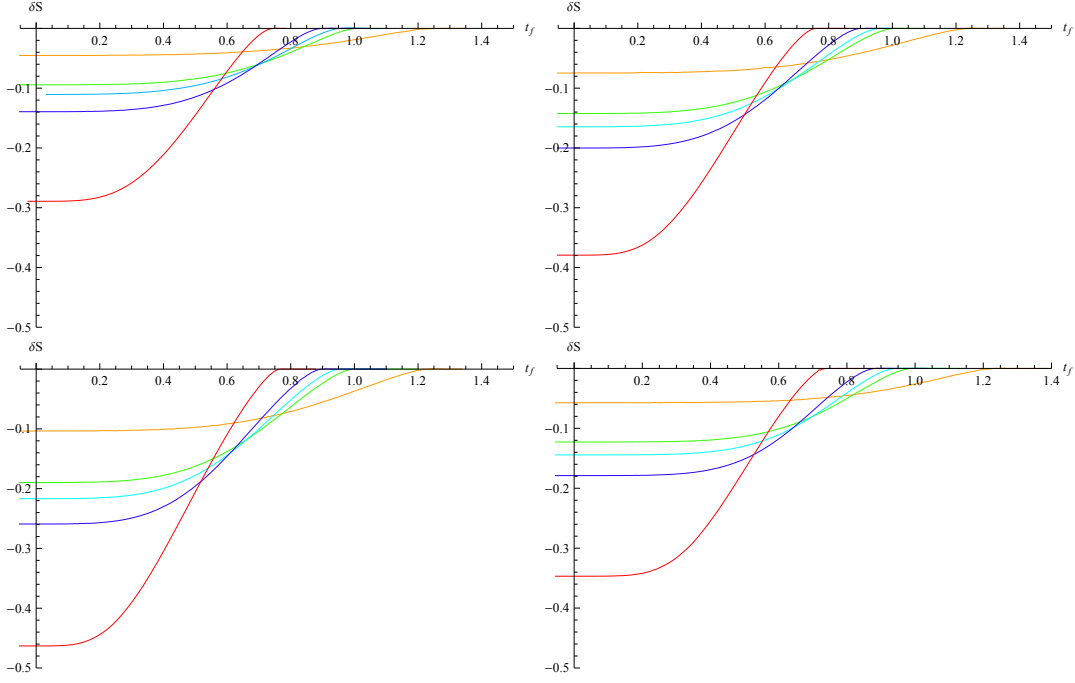


Figura 7.30: *Arriba izquierda:* se muestran las curvas que tienen  $\Delta t = 0$ ,  $d = 4$ ,  $\ell = 2$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $\alpha = -1, -0.1, 0, 0.1, 0.24$ . Amarillo, verde, celeste, azul y rojo respectivamente. *Arriba derecha:* se muestran las curvas que tienen  $\Delta t = 0$ ,  $d = 4$ ,  $\ell = 2$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $Q = 1$ ,  $\alpha = -1, -0.1, 0, 0.1, 0.24$ . Amarillo, verde, celeste, azul y rojo respectivamente. *Abajo izquierda:* se muestran las curvas que tienen  $\Delta t = 0$ ,  $d = 4$ ,  $\ell = 2$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $Q = Q_{ext}$ ,  $\alpha = -1, -0.1, 0, 0.1, 0.24$ . Amarillo, verde, celeste, azul y rojo respectivamente. *Abajo derecha:* se muestran las curvas que tienen  $\Delta t = 0$ ,  $d = 5$ ,  $\ell = 2$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $Q = Q_{ext}$ ,  $\alpha = -1, -0.1, 0, 0.1, 0.24$ . Amarillo, verde, celeste, azul y rojo respectivamente.

### 7.3.3. AdS-GB-RN $\Delta t \neq 0$ $Q \neq 0$ $q_E = 0$

En esta sección estudiaremos geodésicas con  $q_E = 0$  y  $\Delta t \neq 0$ , en un fondo AdS-GB-RN donde el perfil de la masa y carga que describen la formación del agujero negro son:

$$\hat{M} = \frac{M - M_{in}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + M_{in}, \quad (7.27)$$

$$\hat{Q} = \frac{Q - Q_{in}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + Q_{in}. \quad (7.28)$$

En las figuras 7.33 y 7.34 mostramos la evolución de la función de dos puntos como función del tiempo final  $t_f$ .

Podemos ver de estas figuras, que los resultados son análogos a los que obtuvimos anteriormente. Con  $\alpha$ ,  $Q$  y  $d$  fijos, al aumentar  $\ell$  el tiempo de termalización aumenta. Si mantenemos  $\ell$ ,  $Q$  y  $d$  fijos al aumentar  $\alpha$  desde valores negativos a positivos podemos observar que el tiempo de termalización disminuye. Por otro lado, al igual que en el caso puramente AdS-RN, el incremento en la carga final  $Q$  a la que llega el sistema para  $\alpha$ ,  $\ell$  y  $d$  fijos, lo que realiza es hacer tomar distintos valores iniciales a la función de dos puntos para  $t_f = 0$ , pero el tiempo de termalización es el mismo tanto para  $Q = 0$ , como para  $Q = 1$ . Esto lo podemos observar claramente en la figura 7.33.

Teniendo en mente el fenómeno de *Swallow tail*, nuevamente para  $\ell$  grande y  $Q_{ext}$  este aparece, siendo más notorio cuando  $\alpha$  es cercano al valor crítico 0.25. Parece ser que existe una especie de competencia entre  $\alpha$  por un lado,  $\ell$  grande y  $Q_{ext}$ . Podemos ver también que este efecto se incrementa al aumentar la dimensión  $d$ .

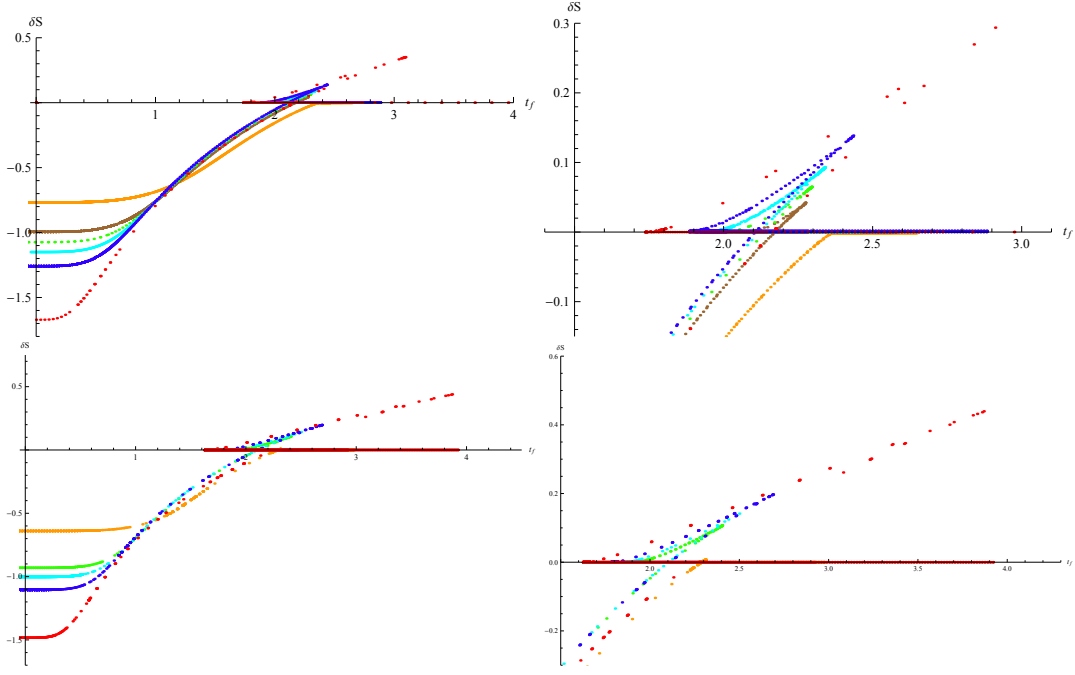


Figura 7.31: *Arriba izquierda* En la figura de la izquierda todas las figuras tienen  $\Delta t = 0$ ,  $d = 4$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $Q = Q_{ext}$ ,  $\alpha = -1, -0.24, -0.1, 0, 0.1, 0.24$ . Amarillo, marrón, verde, celeste, azul y rojo respectivamente. *Arriba derecha* La figura de la derecha es un zoom de la izquierda. *Abajo izquierda* En la figura de la izquierda todas las figuras tienen  $\Delta t = 0$ ,  $d = 5$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $Q = Q_{ext}$ ,  $\alpha = -1, -0.24, -0.1, 0, 0.1, 0.24$ . Amarillo, marrón, verde, celeste, azul y rojo respectivamente. *Abajo derecha* La figura de la derecha es un zoom de la izquierda.

### 7.3.4. Estudio de la función de dos puntos a tiempos diferentes de un operador escalar cargado AdS-GB-RN

En esta subsección presentamos la otra parte de la tesis que contiene resultados originales que serán publicados próximamente en [2]. En consecuencia, en lo que sigue estudiaremos la función de correlación asociado a un operador escalar cargado en un fondo de AdS-GB-RN. Para ello, al igual que en la sección donde estudiamos la función de correlación asociado a un operador escalar cargado en un fondo de AdS-RN, proponemos como masa y carga del agujero negro en formación

$$\hat{M} = \frac{M - M_{in}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + M_{in}, \quad (7.29)$$

$$\hat{Q} = \frac{Q - Q_{in}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + Q_{in}, \quad (7.30)$$

La acción y las ecuaciones de movimiento para describir a estas geodésicas, quedan exactamente igual que en 7.2.2, con el cambio que sólo se maniesta en que  $f \rightarrow \mathcal{F}$ .

A diferencia de las geodésicas cargadas en un fondo de AdS-RN, ahora tenemos un nuevo parámetro  $\alpha$ . Este parámetro aparece en  $\mathcal{F}$ , y como dijimos, si tomamos el límite  $\alpha \rightarrow 0$  obtenemos el fondo AdS-RN y por lo tanto geodésicas en ese fondo.

### Fondo cargandose con $q_e \neq 0$ $\Delta t \neq 0$

En esta sección estudiaremos fondo AdS-GB-RN que se están cargando donde  $q_e \neq 0$  y en consecuencia  $\Delta t \neq 0$ .

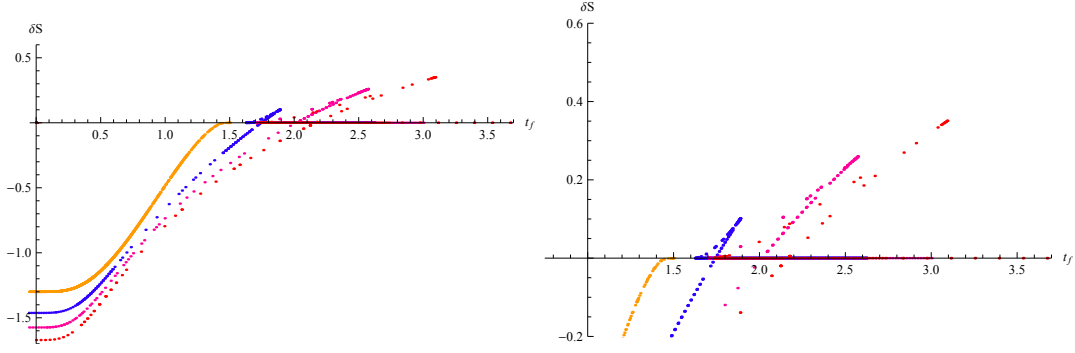


Figura 7.32: En la figura de la izquierda todas las curvas tienen  $\Delta t = 0$ ,  $d = 4$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $\alpha = 0.24$   $Q = 0, 1, 1.25, Q_{ext}$ . Amarillo, azul, violeta y rojo respectivamente.

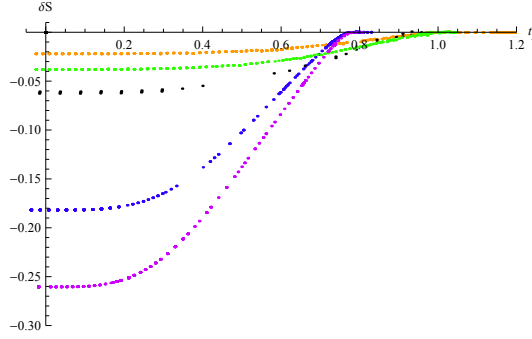


Figura 7.33:  $\Delta t = 0.5$ ,  $d = 4$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $\alpha = -0.24$   $Q = 1$  verde.  $\Delta t = 0.5$ ,  $d = 4$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $\alpha = 0$   $Q = 1$  negro.  $\Delta t = 0.5$ ,  $d = 4$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $\alpha = 0.24$   $Q = 1$  violeta.  $\Delta t = 0.5$ ,  $d = 4$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $\alpha = -0.24$   $Q = 0$  amarillo.  $\Delta t = 0.5$ ,  $d = 4$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $\alpha = 0.24$   $Q = 0$  azul.

Lo que primero estudiamos fue como se ve afectado el  $t_T$  en la función de dos puntos cuando variamos  $\alpha$  desde un valor negativo hasta el valor positivo más grande posible, obviamente dejando todos los restantes parámetros fijos. Dado que tenemos geodésicas con cargas, éstas pueden tener carga positiva o negativa, por lo tanto dichas geodésicas pueden ser atraídas o repelidas por el agujero negro en formación. En la figura 7.35 este efecto se manifiesta mostrándonos curvas de termalización claramente diferentes. Tanto las geodésicas que se repelen como las que son atraídas por el agujero negro muestran el quiebre característico de  $\Delta t \neq 0$  que aparecía en el fondo de AdS-RN, aunque sacando esto, son claramente distintas. Ahora bien, el efecto más importante del fondo de GB que aparece en las curvas de termalización de las funciones de dos puntos es cuando la geodésica se repele con el fondo. Lo que sucede es que a medida que aumenta el  $\alpha$  de valores negativos a positivos, en la región entre el valor de  $t_f = \Delta t$  y el  $t_T$ , la pendiente de la curva cambia de signo. Vemos que el  $t_T$  disminuye a medida que  $\alpha$  aumenta.

Cuando el fondo atrae a la geodésica se mantiene el hecho de que a mayor  $\alpha$  menor  $t_T$ . Y también observamos que para el mismo  $\alpha$  si comparamos los  $t_T$  de geodésicas que se repelen con las atraídas al agujero negro, las atraídas tienen un  $t_T$  más chico.

Comparando las figuras 7.35 y 7.36 vemos que a mayor  $\ell$ , el  $t_T$  es mayor. Por otro lado, en la figura 7.36 se observa lo mismo que en la figura 7.35, a  $\ell$  fijo termalizan primero los modos que tienen mayor  $\alpha$ .

En cuanto a la variación con la dimensión de las curvas de termalización, los resultados son similares cualitativamente a los obtenidos en la sección 7.2.5.

Al igual que en 7.2.5 al aumentar el  $\Delta t$  y los restantes parámetros fijos, el  $t_T$  aumenta, por otro lado vemos que los valores de  $\alpha$  positivos lo que van logrando es cambiar la pendiente de la curva de termalización en la región entre  $\Delta t$  y  $t_T$ . Por último, destacamos que en la figura 7.40 cuando  $\ell$  es grande y la carga

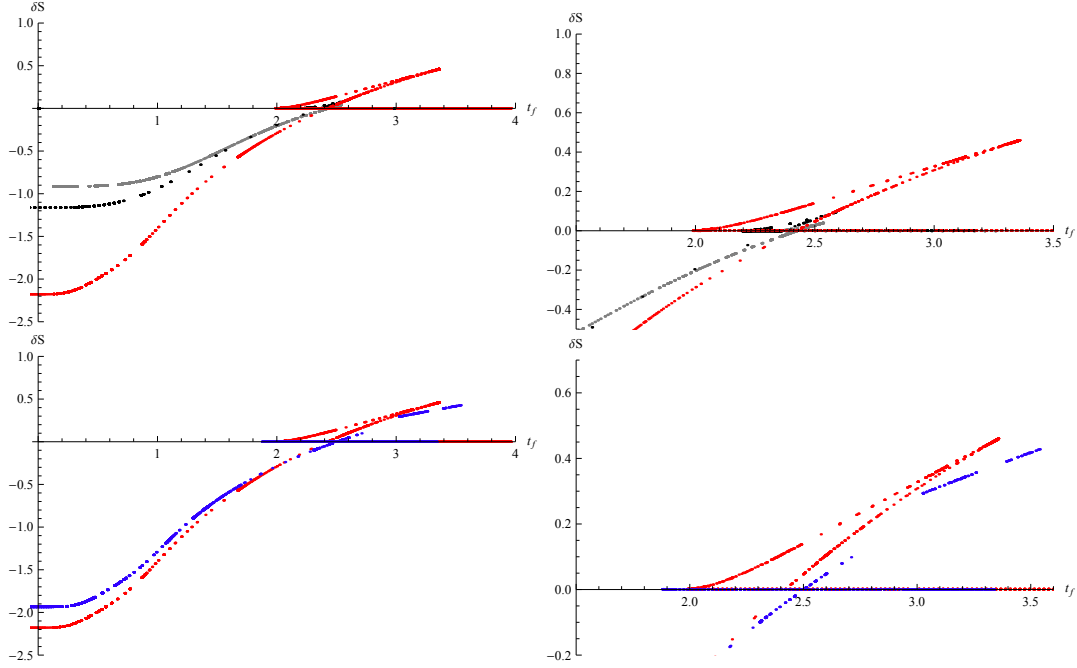


Figura 7.34:  $\Delta t = 0.5$ ,  $d = 4$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $\alpha = -0.24$ ,  $Q = Q_{ext}$  gris.  $\Delta t = 0.5$ ,  $d = 4$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $Q = Q_{ext}$  negro.  $\Delta t = 0.5$ ,  $d = 4$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $\alpha = 0.24$ ,  $Q = Q_{ext}$  rojo.  $\Delta t = 0.5$ ,  $d = 5$ ,  $\ell = 4$ ,  $Q_{in} = 0$ ,  $\alpha = 0.24$ ,  $Q = Q_{ext}$  azul.

$Q = Q_{ext}$  se observa el *swallow tail* que en situaciones similares obtuvimos anteriormente.

## Fondo descargandose con $q_e \neq 0$ $\Delta t \neq 0$

En esta sección estudiaremos lo mismo que estudiamos en la sección 7.2.4, pero esta vez en un fondo de AdS-GB-RNS. Para estudiar un fondo que se esta descargando del tipo descrito en la sección 5.4.2, necesitamos elegir  $|Q| < |Q_{in}|$ . Para fines ilustrativos, tomaremos el caso extremo  $Q = 0$  con las funciones  $\hat{M}$  y  $\hat{Q}$  de la forma

$$\hat{M} = \frac{M - M_{in}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + M_{in}, \quad (7.31)$$

$$\hat{Q} = -\frac{Q_{in}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{v}{v_0} \right) \right) + Q_{in}. \quad (7.32)$$

Como podemos observar de las gráficas de las figuras 7.41, en este tipo de fondo sucede lo mismo que cuando se está cargando, a mayor  $\alpha$  menor  $t_T$ . Lo que no observamos son los cambios de signo de la pendiente de las curvas de termalización entre  $\Delta t$  y el  $t_T$ . Por otro lado cualitativamente en los casos de atracción y repulsión entre el agujero negro y la geodésica, las curvas de termalización tienen la misma forma a las obtenidas en el caso de AdS-RN.

### 7.3.5. Carga constante

Para finalizar el estudio de partículas describiendo geodésicas en un fondo de AdS-GB-RN, estudiamos el caso en que la carga  $Q$  es constante, como en 7.2.3. Es decir, volvimos a elegir la misma forma funcional del potencial químico (7.15) y (7.16), etc. Los resultados se exhiben en la figura 7.42.

Reportamos que la forma funcional de las curvas son similares a las encontradas en la subsección 7.2.3, tanto en el caso repulsivo como en el caso atractivo. Y al igual que en los casos del fondo descargandose y

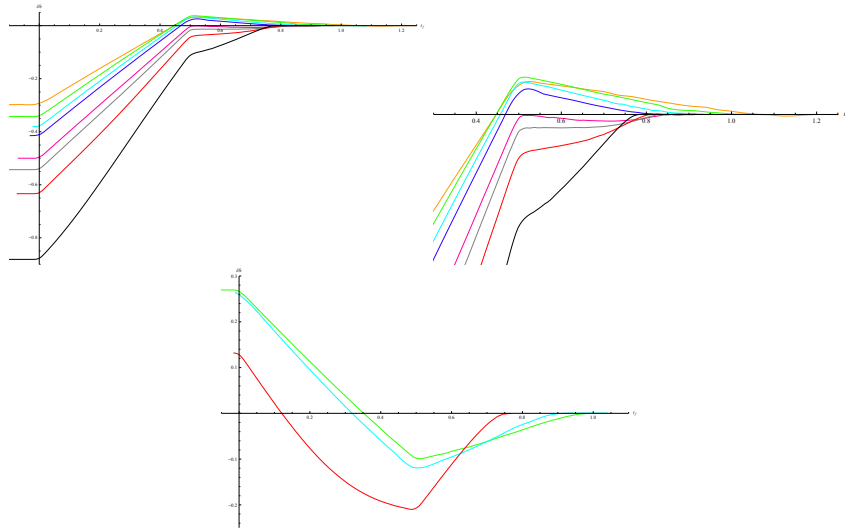


Figura 7.35: Función de dos puntos de operadores escalares cargados como función de  $t_f$  para un potencial químico *quencheado*, modelado por un fondo AdS-GB-RN que se esta cargando. Los gráficos superiores corresponden a  $d = 4$ ,  $\ell = 1.4$ ,  $q_E = 1$  y  $\Delta t = 0.5$ . *Izquierda*:  $q_E = 1$ ,  $\alpha = 0$  celeste,  $-1$  amarillo,  $-0.24$  verde,  $0,1$  azul,  $0,2$  violeta,  $0,22$  gris,  $0,24$  rojo y  $0,24999$  negro, respectivamente. *Derecha*: Es un zoom de la figura de la izquierda. La figura de abajo corresponde a  $d = 4$ ,  $\ell = 1.4$ ,  $q_E = -1$  y  $\Delta t = 0.5$ . Donde  $\alpha = 0$  es la curva celeste,  $-0.24$  verde, y  $0.24$  rojo.

cargandose, a medida que aumenta  $\alpha$  el  $t_T$  disminuye.



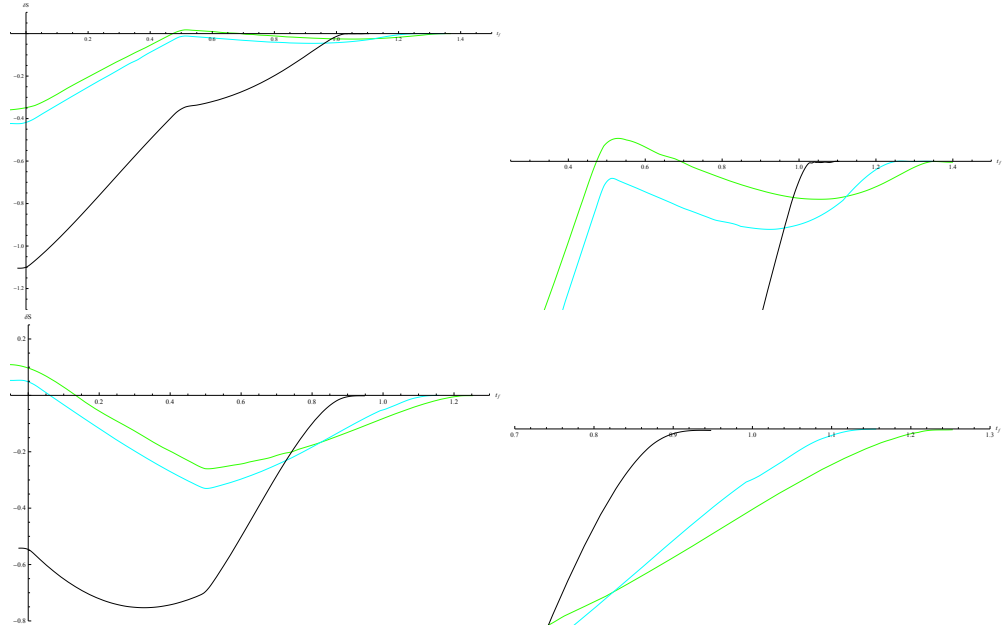


Figura 7.36: Función de dos puntos de operadores escalares cargados como función de  $t_f$  para un potencial químico *quencheado*, modelado por un fondo AdS-GB-RN que se esta cargando. Los gráficos superiores corresponden a  $d = 4$ ,  $\ell = 2$ ,  $q_E = 1$  y  $\Delta t = 0.5$ . *Left*:  $q_E = 1$ ,  $\alpha = -0.24$  verde,  $\alpha = 0$  celeste, 0.24999 negro resp. *Right*: Es un zoom de la figura de la izquierda). La figura de abajo corresponde  $d = 4$ ,  $\ell = 2$ ,  $q_E = -1$  y  $\Delta t = 0.5$ .  $\alpha = -0.24$  verde,  $\alpha = 0$  celeste, y 0.24999 negro.

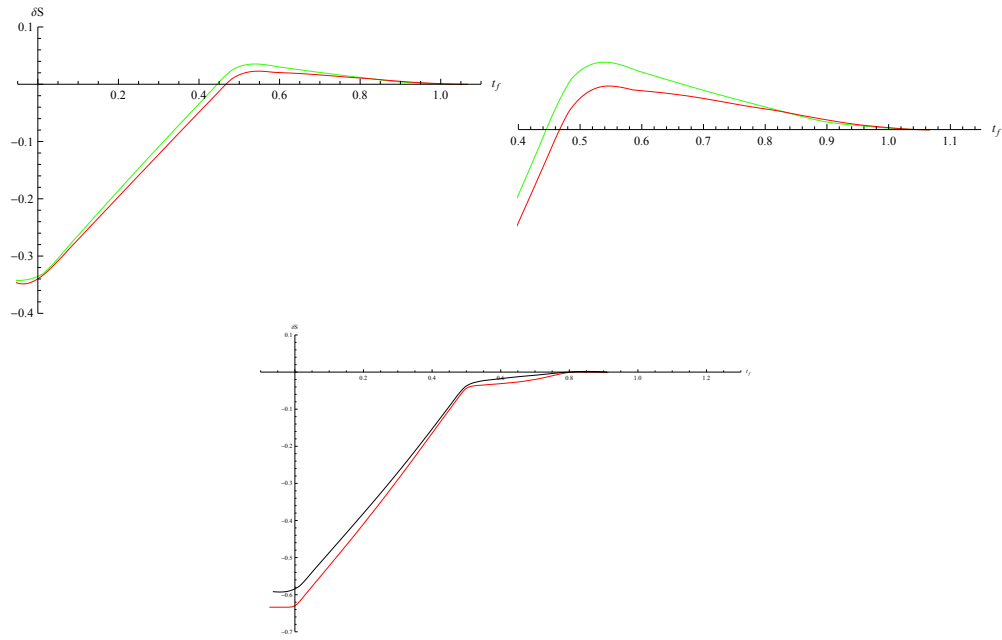


Figura 7.37: Función de dos puntos de operadores escalares cargados como función de  $t_f$  para un potencial químico *quencheado*, modelado por un fondo AdS-GB-RN que se esta cargando. Los gráficos superiores corresponden a  $\ell = 1.4$ ,  $q_E = 1$ , y  $\Delta t = 0.5$ . *Izquierda*:  $\alpha = -0.24$   $d = 4$ , 5 verde, y rojo resp. *Derecha*: Es un zoom de la figura de la izquierda). La figura de abajo corresponde a  $\alpha = 0.24$ ,  $d = 4$ , 5 rojo, y negro resp.

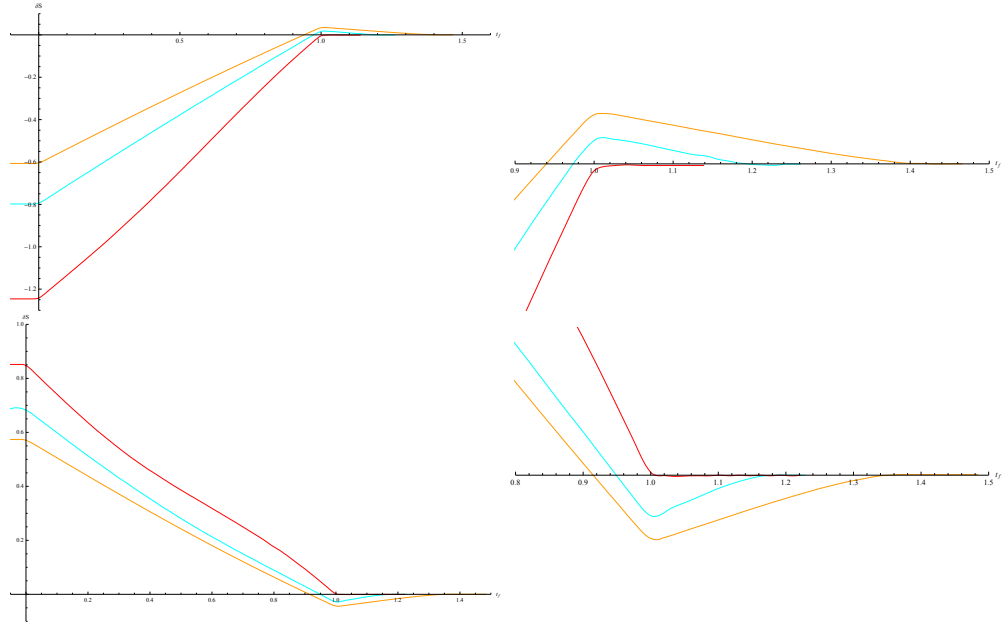


Figura 7.38: Función de dos puntos de operadores escalares cargados como función de  $t_f$  para un potencial químico quencheado, modelado por un fondo GB que se esta cargando. Los gráficos superiores corresponden a  $\ell = 1.4$ ,  $q_E = 1$ ,  $d = 4$  y  $\Delta t = 1$ . *Izquierda*:  $\alpha = -1, 0, 0.24$  amarillo, celeste y rojo respectivamente. *Derecha*: Es un zoom de la figura de la izquierda. La figura de abajo corresponde a  $\ell = 1.4$ ,  $q_E = -1$ ,  $d = 4$  y  $\Delta t = 1$   $\alpha = -1, 0, 0.24$  amarillo, celeste y rojo respectivamente.

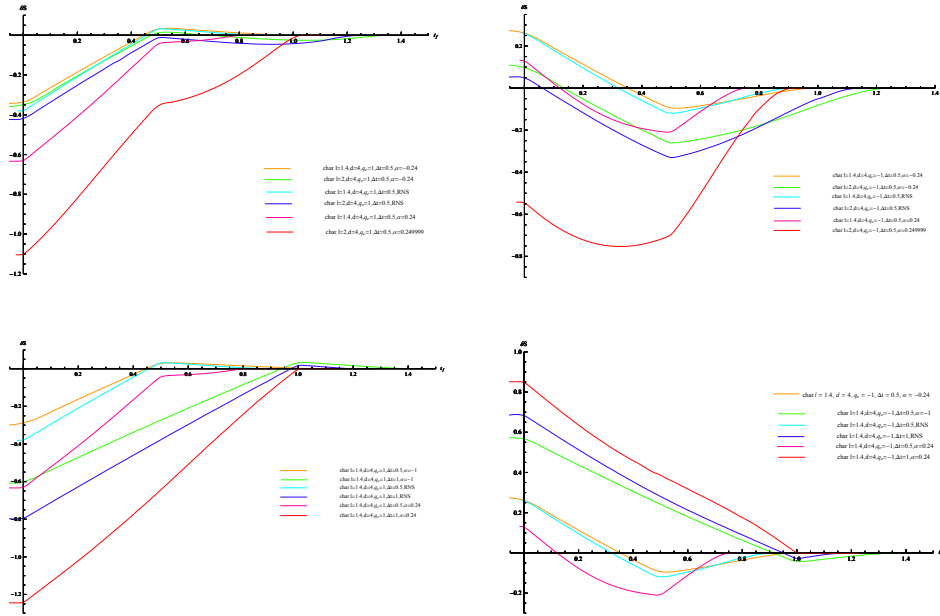


Figura 7.39: Función de dos puntos de operadores escalares cargados como función de  $t_f$  para un potencial químico *quencheado*, modelado por un fondo AdS-GB-RN que se esta cargando.

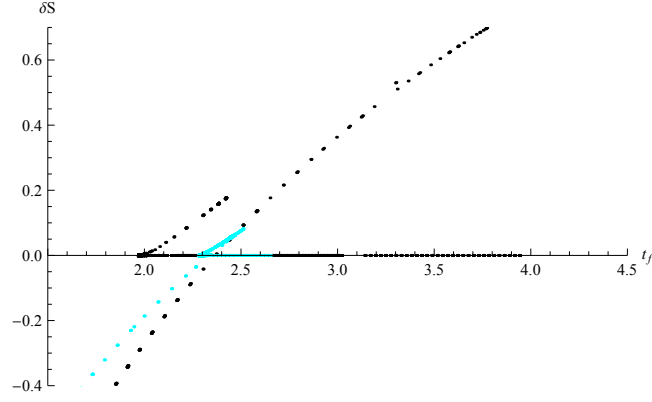


Figura 7.40: Función de dos puntos de operadores escalares cargados como función de  $t_f$  para un potencial químico *quencheado*, modelado por un fondo AdS-GB-RN que se esta cargando. Las curvas corresponden a  $\ell = 4$ ,  $Q = Q_{ext}$ ,  $q_E = 1$ ,  $d = 4$ ,  $\Delta t = 0.5$  y  $\alpha = -0.24$  celeste.  $\ell = 4$ ,  $Q = Q_{ext}$ ,  $q_E = 1$ ,  $d = 4$ ,  $\Delta t = 0.5$  y  $\alpha = 0.24$  negro.

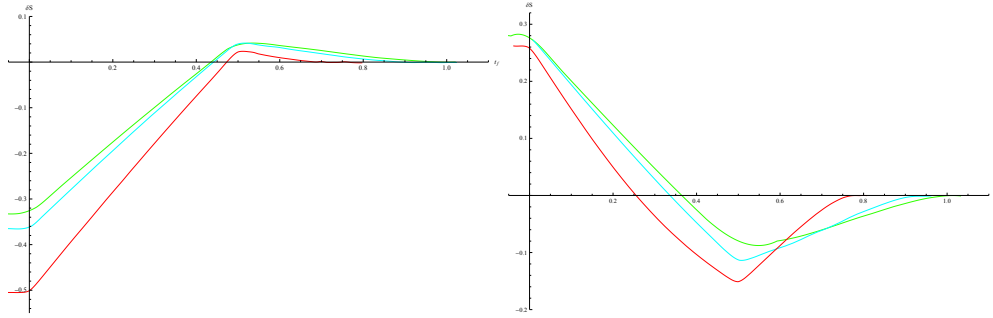


Figura 7.41: Función de dos puntos de operadores escalares cargados como función de  $t_f$  para un potencial químico *quencheado*, modelado por un fondo AdS-GB-RN que se esta descargando. Las curvas corresponden a  $\ell = 1.4$ ,  $d = 4$ ,  $\Delta t = 0.5$  y  $\alpha = -0.24, 0, 0.24$  verde, celeste y rojo resp. *Izquierda*:  $q_E = 1$ . *Derecha*:  $q_E = -1$   $\alpha = -0.24, 0, 0.24$  verde, celeste y rojo resp.

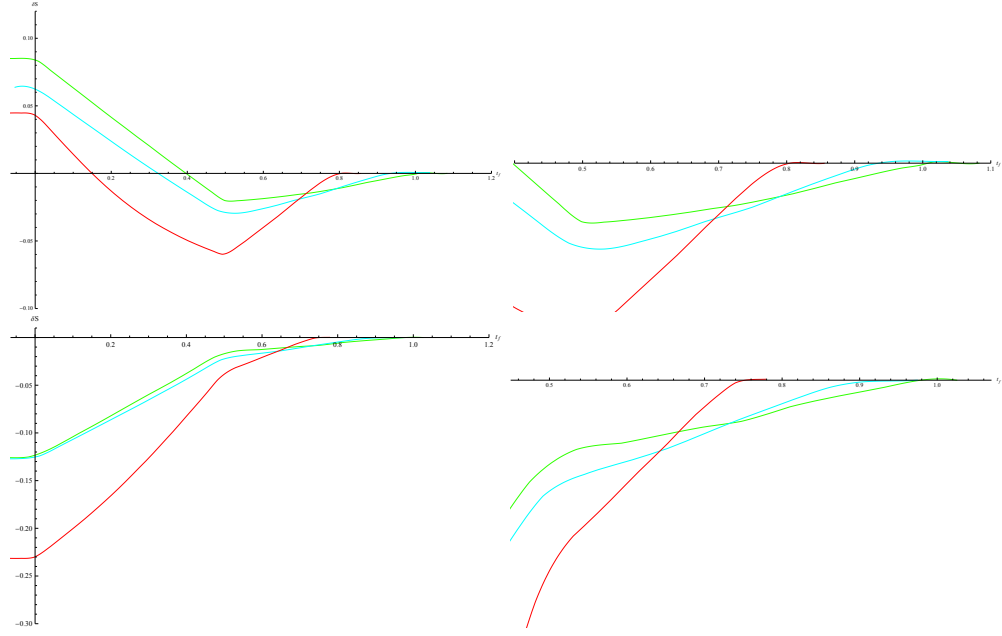


Figura 7.42: Función de dos puntos de operadores escalares cargados como función de  $t_f$  para un potencial químico *quencheado*, modelado por un fondo AdS-GB-RN a carga constante, donde la masa transiciona de  $M_{in} = 1 + Q^2$  a  $M = 3$ , siendo  $Q = Q_{in} = 1$ . Los gráficos superiores corresponden a  $\ell = 1.4$ ,  $d = 4$ ,  $\Delta t = 0.5$  y  $\alpha = -0.24, 0, 0.24$  verde, celeste y rojo resp. *Izquierda*:  $q_E = 1$ . *Derecha*: Es un zoom de la figura de la izquierda. Los graficos de la segunda fila corresponden a *Izquierda*:  $q_E = -1$   $\alpha = -0.24, 0, 0.24$  verde, celeste y rojo resp. *Derecha*: Es un zoom de la figura de la izquierda.

## Capítulo 8

# Conclusiones

En este trabajo hemos empleado la correspondencia AdS/CFT para estudiar la evolución temporal de sistemas físicos fuertemente acoplados fuera del equilibrio. Para realizar dicho análisis, estudiamos la función de correlación de dos puntos asociadas a operadores escalares cargados y no cargados de la QFT, calculada según la propuesta holográfica [89], [90] y [91]. Empleamos la aproximación geodésica en el contexto gravitatorio que es la apropiada para el estudio de operadores de peso conforme  $\Delta \gg 1$ .

Extendimos el análisis realizado por [9], [11], [101], [102]. La inyección de energía (*quench*) se modeló mediante el colapso gravitatorio de una capa de materia, específicamente por una métrica de Vaidya asintóticamente *AdS*. Nuestro análisis estudió la función de dos puntos asociados operadores escalares con carga en los fondos que representan la inyección de energía y partículas (potencial químico) en el sistema.

Como mencionamos anteriormente, a dicha función, la evaluamos en distintos tipos de escenarios de colapsos gravitatorios, y nos permitió confirmar y predecir resultados sobre la dinámica de sistemas cuánticos que alcanzan el equilibrio térmico luego de cierto tiempo. Los observables nos permitieron obtener información sobre la escala de tiempo de termalización  $t_T$ . Para realizar esto, entendimos como las geodésicas tipo-espacio nos permiten sondear el interior del *bulk*. Las geodésicas tipo-tiempo nunca llegan al borde. En consecuencia las funciones a dos puntos en la teoría de campos en el límite de  $\Delta \gg 1$ , son descritas por geodésicas tipo-espacio en un espacio-tiempo curvo, que nacen y terminan en la frontera de este espacio, que posee una dimensión superior al espacio donde vive la QFT.

Hemos argumentado que en situaciones fuera del equilibrio los observables interesantes a examinar son observables no-locales.

Otro resultado importante de esta tesis, es que al trabajar con fondos con carga  $Q$  (en presencia de potencial químico no nulo), estudiamos operadores neutros y cargados, esto es, geodésicas sin carga, y con carga  $q_E \neq 0$  y encontramos que cuando  $q_E \neq 0$  no es posible hallar soluciones que posean  $\Delta t = 0$ . Esto quiere decir que para el caso de operadores escalares cargados los puntos del borde de donde sale y a donde llega la geodésica, tienen que estar separados tanto espacial  $\ell$ , como temporalmente en  $\Delta t \neq 0$ . Fue en este caso que pudimos inspeccionar la evolución de la función de dos puntos de operadores escalares cargados de la CFT.

La formación de agujeros negros tanto en AdS, como en AdS-RN o en AdS-GB-RN, resultó ser por tanto un apropiado modelo holográfico de termalización para sistemas cuánticos fuera del equilibrio. Las dificultades superadas para llegar a los resultados mostrados tuvieron su origen principalmente en los cálculos numéricos requeridos para resolver las ecuaciones involucradas. Para resolver las ecuaciones utilizamos el método de *shooting*.

A partir de los resultados obtenidos, tanto en los fondos AdS-RN como en el AdS-GB-RN, se concluyó que el efecto de introducir un potencial químico en la teoría de campos es retrasar su tiempo de termalización, con un efecto que se hace más notable cuanto mayor es la distancia entre los puntos del borde. Estos resultados están en concordancia con la termalización del tipo *top-down* que se observan en ausencia de potencial químico.

El fenómeno del *Swallow tail* para la función de dos puntos, depende básicamente de cuanto difiera la carga final del sistema de la carga extremal y de la separación de los extremos de la geodesica  $\ell$ . Encontramos que para  $\ell$  chico y carga  $Q = 0$ , no aparece. Para  $\ell$  chico y carga  $Q = Q_{ext}$  tampoco se observa. Aunque

encontramos que para  $\ell$  grande y carga  $Q = 0$  no aparece, a medida que vamos aumentando la carga final  $Q$  y nos acercamos a la carga extremal el efecto comienza a ser relevante. Por otro lado, obtuvimos que en un fondo AdS-GB-RN cuando la carga final es extremal o cercana, el hecho que  $\alpha$  sea lo más grande posible hace que el *Swallow tail* se magnifique.

En un fondo de GB vemos que a medida que aumenta  $\alpha$ , las geodésicas inspeccionan mayores valores de  $z$ , parece ser que este fenómeno está relacionado con el hecho de que para  $\ell$  y carga  $Q$  el efecto de *Swallow tail* se más prominente.

# Capítulo 9

## Apéndice

### 9.1. Ecuaciones de movimiento

#### 9.1.1. Principio de mínima acción

La formulación más general de la ley del movimiento de los sistemas mecánicos es el principio de mínima acción (o principio de Hamilton) [111]. Según este principio todo sistema mecánico está caracterizado a partir de una función bien definida:

$$L = L(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t), t) \quad (9.1)$$

o más brevemente por  $L = L(q(t), \dot{q}(t), t)$ , y el movimiento del sistema satisface la siguiente condición: Supongamos que en los instantes  $t = t_1$  y  $t = t_2$  el sistema ocupa las posiciones  $q_i = q(t_1)$  y  $q_f = q(t_2)$  respectivamente; el sistema se mueve entre estas dos posiciones de manera que la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (9.2)$$

tome un valor estacionario. La función  $L$  se conoce como *lagrangiano* del sistema, y la integral (9.2), acción.

Debido a que el estado dinámico de un sistema mecánico está completamente definido por la posición y la velocidad, el lagrangiano solo puede depender de estas.

Establezcamos las ecuaciones diferenciales que determinan el extremo de la ecuación (9.2). Por simplicidad, empecemos suponiendo que el sistema no tiene más que un solo grado de libertad, de manera que hace falta determinar una sola función  $q(t)$ .

Para encontrar el extremo de la acción, debemos realizar una variación a la función  $q(t)$  con los extremos fijos

$$q_v(t, \alpha) = q(t) + \alpha \delta q(t), \text{ con } \delta q(t_1) = 0, \quad \delta q(t_2) = 0 \quad y \quad \delta t = 0, \quad (9.3)$$

donde  $q_v(t, \alpha)$  es la trayectoria variada,  $\delta q(t)$  es lo que le debemos sumar a la trayectoria  $q(t)$  para llegar a la trayectoria variada  $\delta q_v(t, \alpha)$ . En la figura 9.1 se presenta un esquema gráfico de como se realiza tal variación.

Comencemos con la acción como función del parámetro de expansión  $\alpha$

$$S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t, q_v(t), \dot{q}_v(t)), \quad (9.4)$$

derivando la acción respecto a  $\alpha$  resulta

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_v} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \delta \dot{q} \right\}. \quad (9.5)$$

para encontrar las ecuaciones de movimiento debemos pedir

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad (9.6)$$

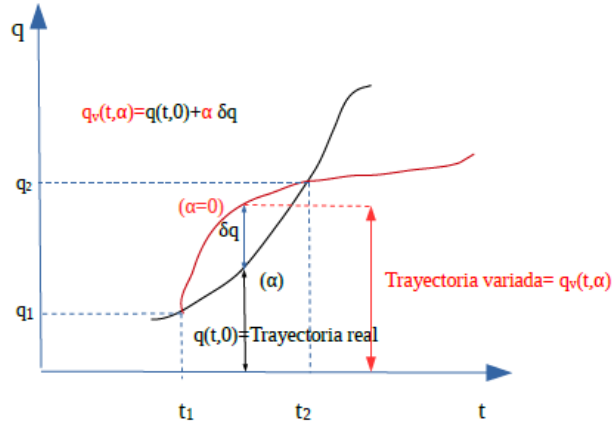


Figura 9.1:

donde se define como la variación de la acción a

$$\delta S = \left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad (9.7)$$

en consecuencia (9.5), evaluandola en  $\alpha = 0$ , la variación de la acción no queda

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right\}, \quad (9.8)$$

integrando por partes

$$\delta S = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q, \quad (9.9)$$

aplicando el hecho de que los extremos de la trayectoria están fijos (9.3), resulta<sup>1</sup>

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q. \quad (9.11)$$

Dado que se debe cumplir para cualquier  $\delta q$  que  $\delta S = 0$ , obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (9.12)$$

Si hay varios grados de libertad, las  $n$  funciones diferentes  $q_i$  deben variar independientemente, en consecuencia se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.13)$$

Debemos hacer una nueva consideración general. Sean dos funciones  $L'(q, \dot{q}, t)$  y  $L(q, \dot{q}, t)$  que sólo difieren en una derivada total con respecto al tiempo de una función cualquiera de las coordenadas y del tiempo  $f(q, t)$ :

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \quad (9.14)$$

<sup>1</sup>Podemos definir

$$\delta L = \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q. \quad (9.10)$$



integrando respecto al tiempo para obtener las acciones, la relación entre las integrales definidas por (9.2) es

$$S' = \int_{t_i}^{t_f} dt L'(q(t), \dot{q}(t), t) = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) + \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{df}{dt} = S + f(q(t_f), t_f) - f(q(t_i), t_i), \quad (9.15)$$

es decir, difieren en un término que desaparece al variar la acción. De modo que la condición  $\delta S' = 0$  coincide con la condición  $\delta S = 0$  y la forma de las ecuaciones de movimiento queda invariable. De esta manera, la función de Lagrange se define con la indeterminación aditiva de la derivada total con respecto al tiempo de cualquier función de las coordenadas y del tiempo.

### 9.1.2. Ecuaciones de Hamilton

Otra formulación alternativa de la mecánica de lagrange es la que nos brinda Hamilton. La lagrangiana es una función de  $q$ ,  $\dot{q}$  y  $t$  donde las ecuaciones de movimiento son  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden. Hamilton nos propone un cambio, hacer una transformación tal que nos lleve a la función que contiene toda la información disponible del sistema que dependa de  $q$ ,  $p$  y  $t$ , donde las ecuaciones de movimiento sean el doble, pero de primer orden.

El paso de un conjunto de variables a otro puede realizarse por transformaciones de Legendre. Dado que la lagrangiana depende de  $q(t)$  y  $\dot{q}(t)$

$$dL = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q} dq + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q}. \quad (9.16)$$

Esta expresión puede escribirse como

$$dL = \sum_{i=1}^n \dot{p} dq + \sum_{i=1}^n p d\dot{q}, \quad (9.17)$$

sumando y restando  $d(p_i \dot{q}_i)$

$$dL = \sum_{i=1}^n \{ \dot{p} dq + p d\dot{q} + d(p_i \dot{q}_i) - d(p_i \dot{q}_i) \}. \quad (9.18)$$

obtenemos

$$d(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L) = \sum_{i=1}^n \{ \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \}. \quad (9.19)$$

donde a la expresión entre paréntesis se le llama *Hamiltoniano* del sistema

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (9.20)$$

En consecuencia, (9.19) se escribe

$$dH = \sum_{i=1}^n \{ \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \}, \quad (9.21)$$

en la cual las variables independientes son las coordenadas y los momentos. A partir de ella obtenemos las ecuaciones

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (9.22)$$

Estas son las ecuaciones de movimiento en las variables  $q$  y  $p$ , y se las llaman *ecuaciones de Hamilton*. Constituyen un conjunto de  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden, entre las  $2n$  incógnitas  $p_i$  y  $q_i$ , que sustituyen a las  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden proporcionadas por la mecánica lagrangiana.

### 9.1.3. Función de Routh

En ciertos casos es conveniente, cuando se pasa a nuevas variables, no sustituir todas las velocidades generalizadas por los momentos, sino solamente algunas de ellas. La transformación correspondiente es completamente análoga a la vista en la sección (9.1.2). Empecemos por suponer que hay dos coordenadas  $q$ ,  $\xi$  y realizamos la siguiente transformación

$$\{q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi}\} \Rightarrow \{q, \xi, p, \dot{\xi}\} \quad (9.23)$$

siendo  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  y  $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$ . El diferencial de la lagrangiana  $L(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$  es

$$\begin{aligned} dL(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi}) &= \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi} \\ &= \dot{p} dq + \underbrace{p d\dot{q}}_{d(p\dot{q}) - \dot{q} dp} + \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi} \end{aligned} \quad (9.24)$$

despejando

$$d(p\dot{q} - L) = -\dot{p} dq + \dot{q} dp - \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi}. \quad (9.25)$$

Definimos la función de Routh como

$$R = p \dot{q} - L \quad (9.26)$$

y su diferencial es

$$dR = -\dot{p} dq + \dot{q} dp - \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi}, \quad (9.27)$$

en consecuencia obtenemos

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q} \quad (9.28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -\frac{\partial R}{\partial \xi} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}, \quad (9.29)$$

sustituyendo estas igualdades en las ecuaciones de lagrange para la coordenada  $\xi$  obtenemos:

$$\frac{\partial R}{\partial \xi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = 0. \quad (9.30)$$

Entonces la función de Routh es una Hamiltoniana respecto a la coordenada  $q$  (9.28) y una lagrangiana respecto a la coordenada  $\xi$  (9.30). La generalización de estas expresiones para el caso de varias coordenadas  $q$  y  $\xi$  es inmediata.

### 9.1.4. La acción como función de las coordenadas

Al formular el principio de mínima acción, consideramos la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (9.31)$$

tomada a lo largo de una trayectoria entre dos posiciones dadas  $q(t_1)$  y  $q(t_2)$  que ocupa el sistema en dos instantes dados  $q(t_1)$  y  $q(t_2)$ . Cuando hacíamos variar la acción, se comparaban los valores de esta integral para trayectorias vecinas con los mismos límites  $q(t_1)$  y  $q(t_2)$ . Sólo una de estas trayectorias correspondían al movimiento real, aquella para la cual la integral  $S$  tiene su valor extremo.

Consideremos a  $S$  como una magnitud que caracteriza el movimiento a lo largo de trayectorias reales, y comparando los valores de  $S$  para trayectorias que tienen un origen común  $q(t_1) = q_i$ , pero en el instante final  $t_2$  pasan por posiciones distintas. En otras palabras, consideremos a la integral de la acción para trayectorias reales como una función de las coordenadas del límite superior de la integral.

La variación de la acción cuando se pasa de una trayectoria a otra trayectoria vecina, está dada (si solo hay un grado de libertad) por la expresión (9.9)

$$\delta S = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q. \quad (9.32)$$

Como las trayectorias de un movimiento real satisfacen las ecuaciones de movimiento, la integral de la expresión anterior es nula<sup>2</sup>. En el primer término hagamos  $\delta q(t_1) = 0$  y designemos a  $\delta q(t_2)$  como  $\delta q$ , sustituyendo  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ , obtenemos  $\delta S = p \delta q$ , o en el caso de varios grados de libertad

$$\delta S = \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i, \quad (9.34)$$

a esta relación la podemos pensar como definición de

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \quad (9.35)$$

De forma análoga, podemos considerar a la acción como una función explícita del tiempo, considerando trayectorias que parten en un instante  $t_1$  de un punto dado  $q_i = q(t_1)$  y terminan en el punto  $q_f$  en diferentes instantes de  $t_2 = t$ .

De la definición de la acción, naturalmente se tiene

$$\frac{dS}{dt} = L. \quad (9.36)$$

Por otra parte, considerando a  $S$  como función de  $q$  y  $t$ , tenemos

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (9.37)$$

utilizando que  $L = p\dot{q} - H$  obtenemos

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0. \quad (9.38)$$

Las expresiones (9.35)(9.38) pueden resumirse en la expresión

$$dS = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt, \quad (9.39)$$

que da la diferencial total de la acción como función de las coordenadas y del tiempo en el límite superior de la integral (9.31).

### 9.1.5. Principio de mínima acción para una variación completa de la acción

Es interesante encontrar una formulación más general del principio de mínima acción que permita que las curvas en el espacio de configuración tengan los extremos abiertos, es decir, que cada curva empiece y finalice en tiempos diferentes (y en puntos diferentes del espacio de configuración).

Para realizar esto, debemos introducir una nueva variación (que la simbolizamos con la letra griega  $\Delta$ ) menos restrictiva; en general, el camino variado a lo largo del cual se calcula la integral puede terminar en tiempos diferentes que el camino real y puede haber una variación de las coordenadas en los extremos. Sin embargo, podemos utilizar la misma parametrización del camino variado que en la ecuación (9.3), en consecuencia tenemos

$$q(t, \alpha) = q(t) + \alpha \delta q(t), \quad (9.40)$$

---

<sup>2</sup>Es decir, tenemos

$$\delta S = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \right|_{t_1}^{t_2}. \quad (9.33)$$

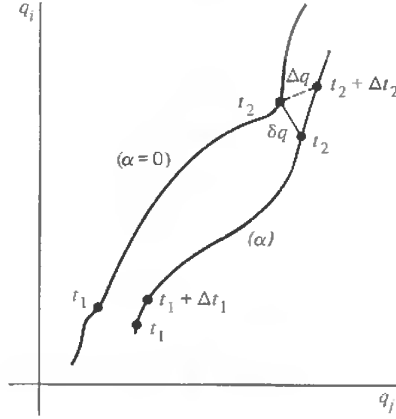


Figura 9.2: Ilustración esquemática de la variación  $\Delta$  en el espacio de las configuraciones.

donde  $\alpha$  es el parámetro infinitesimal que conduce al camino correcto cuando se anula. Naturalmente, ya no es necesaria la condición de que las  $\delta q_i(t)$  se anulen en los extremos  $t_1$  y  $t_2$  (ni en los extremos  $t_1 + \Delta t_1$  y  $t_2 + \Delta t_2$  de un camino variado). Solo requerimos que sean funciones continuas y diferenciables en cualquier intervalo real o variado. En la figura 9.2 podemos ver esquemáticamente el camino correcto y el variado para una variación  $\Delta$  en el espacio de configuraciones.

Definimos a una variación completa de la acción, cuando al usar el principio de mínima acción podemos variar tanto a las coordenadas como al tiempo, y esto se escribe

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} dt L(\alpha) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(0), \quad (9.41)$$

donde  $L(\alpha)$  representa el valor de  $L$  cuando tomamos el camino variado, siendo  $L(0)$  el camino correcto. La variación se descompone en dos partes, una surge del cambio en los límites de integración y la otra del parámetro  $\alpha$ , es decir, la variación de la curva como tal. De la figura 9.2 podemos ver que los límites de integración de (9.41) se pueden escribir

$$\int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} = \int_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} + \int_{t_2}^{t_2 + \Delta t_2} \quad (9.42)$$

con lo cual (9.41) queda

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\alpha) - \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} dt L(\alpha) + \int_{t_2}^{t_2 + \Delta t_2} dt L(\alpha) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(0), \quad (9.43)$$

es útil parametrizar  $L(\alpha)$  como

$$L(\alpha) = L(0) + \delta L(\alpha) \quad (9.44)$$

donde  $\delta L(\alpha)$  nos da cuenta de la desviación en el Lagrangiano debida a la evaluación en la curva vecina, con respecto a su valor en la curva real. Claramente  $\delta L(\alpha)$  es una cantidad infinitesimal. Utilizando (9.44)

y (9.42), (9.43) nos queda

$$\begin{aligned}\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt L &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(0) + \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(\alpha) - \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} dt L(0) \\ &+ \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} dt L(0) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(0) \\ &- \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} dt \delta L(\alpha) + \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} dt \delta L(\alpha).\end{aligned}\quad (9.45)$$

y dado que las cantidades  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$  y  $\delta L(\alpha)$  son infinitesimales, las dos últimas integrales nos dan diferenciales de segundo orden y por tanto se desprecian.

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(\alpha) + \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} dt L(0) - \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} dt L(0) \quad (9.46)$$

Similarmente,  $L(0)$  se puede considerar constante dentro de los intervalos de integración  $[t_i, t_i + \Delta t_i]$ , puesto que una variación infinitesimal del Lagrangiano dentro de uno de estos intervalos, daría una contribución del orden de  $L\Delta t_i$ . Con estas consideraciones, la variación  $\Delta$  a primer orden toma la forma

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = \Delta t_2 L(t_2, 0) - \Delta t_1 L(t_1, 0) + \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(\alpha). \quad (9.47)$$

Los dos primeros términos en el miembro derecho de la ecuación (9.47), se deben a la variación en los límites de integración, tomados sobre el camino correcto. El tercer término de la derecha de (9.47), se origina en la variación de la curva como tal a través del parámetro  $\alpha$ , tomando los mismos límites de integración que en la curva original. Reemplazando (9.10) para  $\delta L$ , resulta

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \Delta t_2 L(t_2, 0) - \Delta t_1 L(t_1, 0), \quad (9.48)$$

y dado que esta variación que estamos realizando son compatibles con las ecuaciones de Lagrange, el segundo término se anula, en consecuencia

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \right|_{t_1}^{t_2} + \Delta t_2 L(t_2, 0) - \Delta t_1 L(t_1, 0). \quad (9.49)$$

Normalmente, la expresión anterior se resume de la siguiente manera

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = L\Delta t + p \delta q|_1^2. \quad (9.50)$$

$\delta q_1$  es la variación en  $q$  con respecto a la coordenada en la curva correcta tomada en el tiempo  $t_1$ , otro tanto ocurre con  $\delta q_2$ . La idea es escribir la variación  $\Delta$  de la acción en términos de las variaciones de las coordenas, en consecuencia calculemos  $\Delta q_2$

$$\Delta q_2 = q(t_2 + \Delta t_2, \alpha) - q(t_2, 0) = q(t_2 + \Delta t_2, 0) + \alpha \delta q(t_2 + \Delta t_2) - q(t_2, 0) \quad (9.51)$$

donde hemos usado la parametrización (9.40). A primer orden en las cantidades infinitesimales  $\alpha$  y  $\Delta t_2$  y eliminado contribuciones de segundo orden

$$\Delta q_2 = \left( \frac{q(t_2 + \Delta t_2, 0) - q(t_2, 0)}{\Delta t_2} \right) \Delta t_2 + \alpha \underbrace{\delta q(t_2 + \Delta t_2)}_{a \text{ primer orden } \delta q(t_2)} \quad (9.52)$$

obtenemos

$$\Delta q_2 = \dot{q}(t_2) \Delta t_2 + \alpha \delta q(t_2). \quad (9.53)$$

Para referirnos de forma indistinta a cualquiera de los extremos, escribimos

$$\Delta q = \dot{q}(t)\Delta t + \alpha \delta q(t) \quad \Rightarrow \quad \alpha \delta q(t) = \Delta q - \dot{q}(t). \quad (9.54)$$

Luego, la ecuación (9.50) la podemos escribir en la forma

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = L\Delta t - p \dot{q} \Delta t + p \Delta q|_1^2 \quad (9.55)$$

o sea

$$\Delta S = -H \Delta t + p \Delta q|_1^2, \quad (9.56)$$

que transformando la variación completa en diferencial

$$dS = p dq - H dt \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H, \quad (9.57)$$

que no es otra cosa que la ecuación (9.38). Su importancia la veremos en la sección (9.1.7).

### 9.1.6. Transformaciones canónicas

La elección de las coordenadas generalizadas  $q(t)$  no está limitada por ninguna condición; pueden ser  $n$  magnitudes cualesquiera que definan la posición del sistema en el espacio. De hecho, las ecuaciones de Lagrange y de Hamilton, son invariantes frente a transformaciones del tipo

$$q'_i = q'_i(q_i, t), \quad (9.58)$$

denominadas normalmente *transformaciones puntuales*. Sin embargo, las ecuaciones de Hamilton admiten un conjunto de transformaciones más generales para las cuales son invariantes. Esto sucede, porque en el método de Hamilton los momentos  $p$  son variables independientes con igual categoría que las coordenadas  $q$ , y por lo tanto puede ampliarse la transformación para incluir  $2n$  variables independiente  $p$  y  $q$  que pasarán a  $p'$  y  $q'$  según las expresiones del tipo

$$q'_i = q'_i(q_i, p_i, t), \quad p'_i = p'_i(q_i, p_i, t) \quad (9.59)$$

Esta ampliación de las posibles transformaciones constituye una de las ventajas esenciales del método de Hamilton en Mecánica.

Sin embargo, las ecuaciones de movimiento no conservan su forma canónica para cualquier transformación tipo (9.59). Para ello vamos a deducir las condiciones que deben satisfacerse para que las ecuaciones de movimiento en las nuevas variables  $p'$  y  $q'$  sean de la forma

$$\dot{q}' = \frac{\partial H'}{\partial p'} \quad \dot{p}' = -\frac{\partial H'}{\partial q'} \quad (9.60)$$

con una nueva Hamiltoniana  $H'$ . Cuando esto ocurre decimos que la transformación es canónica.

Las expresiones para las transformaciones canónicas pueden obtenerse de la siguiente manera. Siguiendo (9.14) <sup>3</sup> podemos escribir

$$dS' = dS - dF \quad (9.61)$$

reemplazando por las definiciones

$$\sum_{i=1}^n p'_i dq'_i - H' dt = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt - dF \quad (9.62)$$

Toda transformación canónica está caracterizada por una función  $F$ , denominada *función generatriz de la transformación*. Escribiendo la relación anterior en la forma

$$dF = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n p'_i dq'_i + (H' - H) dt \quad (9.63)$$

---

<sup>3</sup>Por cuestiones históricas escribimos  $f = -F$ , pero obviamente no se altera ningún resultado.

resulta

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial F}{\partial q'_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}; \quad (9.64)$$

como vemos, la función generatriz  $F$  es función de las antiguas coordenadas  $q$  y las nuevas  $q'$ , además del tiempo:  $F = F_1(q, q', t)$ . Cuando  $F$  es conocida las relaciones (9.63) nos brinda la relación entre las antiguas variables  $(q, p)$  las nuevas  $(q', p')$ , así como la nueva hamiltoniana.

En esta tesis fue conveniente expresar la función generatriz mediante las variables  $(q_i, p'_i)$ , en consecuencia volvemos a escribir el diferencial de  $F_1$

$$dF_1 = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n p'_i dq'_i + (H' - H) dt = p dq - p' dq' + d(p' q') - d(p' q') + (H' - H) dt, \quad (9.65)$$

realizando una transformación de Legendre a (9.65) obtenemos

$$d(F_1 + p' q') = p dq + q' dp' + (H' - H) dt, \quad (9.66)$$

donde definimos a una nueva función generatriz  $F_2(q, p', t) = F_1 + p' q'$ , obteniendo las nuevas relaciones:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial F_2}{\partial q'_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (9.67)$$

De modo análogo se pueden obtener las expresiones para las transformaciones canónicas que encierren funciones generatriz dependientes de las variables  $(p, q')$  o de las  $(p, p')$ .

### 9.1.7. Ecuación de Hamilton-Jacobi

Buscamos una transformación canónica tal que

$$q_i, p_i, H(q_i, p_i, t), \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \Rightarrow q'_i, p'_i, H'(q'_i, p'_i, t), \dot{q}'_i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}, \dot{p}'_i = -\frac{\partial H'}{\partial q'_i} \quad (9.68)$$

donde la función generatriz dependa de  $(q_i, p'_i, t)$ , y realice  $H' = 0$ . Esta función es  $F_2$ , que la obtuvimos en la sección anterior. En consecuencia, las relaciones (9.67) resultan

$$\frac{\partial F_2(q_i, p'_i, t)}{\partial t} + H(q_i, p_i) = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = 0 \quad (9.69)$$

con

$$p'_i = cte, \quad q'_i = \tilde{c}te, \quad (9.70)$$

ya que  $H' = 0$ .

Para entender el significado de  $F_2$ , tomemosle la derivada total respecto al tiempo

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \quad (9.71)$$

dado que  $p'$  es constante, el segundo término se anula, en consecuencia

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = L. \quad (9.72)$$

Dado que  $F_2$  surgió a partir de la ecuación (9.61), además es función de  $(q, t)$  por construcción y su derivada respecto al tiempo es el lagrangiano, no puede ser otra cosa que la acción *on-shell*:

$$F_2 = S_{on-shell}. \quad (9.73)$$

En conclusión, hemos probado que  $F_2$  resultó ser la acción *on-shell*, por lo tanto a la ecuación (9.61) la podemos escribir

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, p_i) = \frac{\partial S}{\partial q_i} = 0 \quad (9.74)$$

que normalmente se la conoce como ecuación de Hamilton-Jacobi.

Por otro lado, si queremos obtener la ecuación Hamilton-Jacobi relativista, escribamos la acción para una partícula libre de la siguiente forma

$$S = \frac{1}{2} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \, g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta. \quad (9.75)$$

Siguiendo el principio de Maupertius, la variación completa de la acción anterior es [?]

$$\delta S = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \delta x^\nu - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \delta \tau \left[ \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left( \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta \dot{x}^\mu \right]. \quad (9.76)$$

Realizando un procedimiento similar al que hicimos en la sección 9.1.4 escribimos

$$dS = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu dx^\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu d\tau \quad (9.77)$$

obteniendo

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu, \quad \frac{\partial S}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (9.78)$$

A partir de estas expresiones, resulta

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{\partial S}{\partial \dot{x}^\nu} = 0 \quad (9.79)$$

que es la ecuación de Hamilton-Jacobi en su versión relativista.

## 9.2. Lazos de Wilson Rectangulares

Los lazos de Wilson son otro tipo de observables no locales invariantes de gauge que pueden probar las propiedades térmicas de una teoría de gauge. Por ejemplo los valores de expectación de estos lazos de Wilson pueden detectar transiciones de confinamiento/desconfinamientos en teorías como QCD. Aquí vamos a estudiar la termalización de lazos de Wilson tipo-espacio a partir de un enfoque holográfico en los mismos fondos que estudiamos la termalización de las funciones de dos puntos.

Queremos estudiar lazos de Wilson rectangulares como se muestra en la figura 9.3, que son aquellos que se parametrizan en la frontera con las coordenadas  $(x_1, x_2)$ . Como anteriormente, el resto de las coordenadas espaciales del borde, si las hay, quedan invariantes. Debido a la invariancia traslacional, podemos utilizar solo a la variable  $x_1$  para parametrizar nuestras funciones  $v(x_1)$  y  $z(x_1)$  en nuestra geometría y la llamaremos de aquí en adelante  $x$ .

Como mencionamos en la sección 3.6, la acción que debemos minimizar es la acción de Nambu-Goto

$$A_{NG} = \frac{1}{2\pi\alpha} \int d^2\xi \sqrt{\det h_{ab}} \quad (9.80)$$

donde ahora  $\eta_{\mu\nu}$  de la ecuación (3.48) pasa a ser  $g_{\mu\nu}(X)$ . Esta  $g_{\mu\nu}(X)$ , dependiendo la sección de la tesis, será (5.26), (5.32), (5.70), (5.72) el espacio-tiempo en cuestión a estudiar.

En consecuencia tenemos una métrica del tipo

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(X^\mu) dX^\mu dX^\nu = h_{ab}(X(\xi)) d\xi^a d\xi^b, \quad (9.81)$$

en la que  $h_{ab}$  es la métrica inducida que tiene la conocida forma de

$$h_{ab} = g_{\mu\nu}(X^\mu) \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b}, \quad (9.82)$$

que es la que necesitamos determinar para cada lazo de Wilson que querramos calcular cuando cambiemos los fondos.

Como mencionamos, con la parametrización

$$\xi_1 = x, \quad \xi_2 = x_2, \quad z = z(x) \quad \wedge \quad v = v(x), \quad (9.83)$$



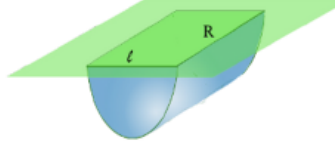


Figura 9.3:

el área nos queda

$$A_{NG} = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_0^R dx_2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dx_1 \frac{\sqrt{1 - \mathcal{F}(v(x_1), z(x_1))v'(x_1)^2 - 2v'(x_1)z'(x_1)}}{z(x_1)^2}, \quad (9.84)$$

$$A_{NG} = \frac{R}{2\pi\alpha} \int_{-l/2}^{l/2} dx \frac{\sqrt{1 - \mathcal{F}(v(x), z(x))v'(x)^2 - 2v'(x)z'(x)}}{z(x)^2}. \quad (9.85)$$

Para encontrar el área mínima, como hicimos con la función de dos puntos, debemos encontrar el extremo de (9.85), para ello tomamos como lagrangiano asociado del área  $A_{NG}$  a  $L_{NG}$  que tiene la forma

$$L_{NG} = \frac{R}{2\pi\alpha} \frac{\sqrt{1 - \mathcal{F}v'(x)^2 - 2v'(x)z'(x)}}{z^2}. \quad (9.86)$$

Para obtener las EOM a partir del lagrangiano (9.86), necesitamos calcular los momentos asociados, esto es

$$\frac{\partial}{\partial z'} L_{NG} = \frac{R}{2\pi\alpha} \left( -\frac{v'(x)}{z(x)^2 \sqrt{1 - \mathcal{F}v'(x)^2 - 2v'(x)z'(x)}} \right), \quad (9.87)$$

$$\frac{\partial}{\partial v'} L_{NG} = \frac{R}{2\pi\alpha} \left( -\frac{fv'(x) + z'(x)}{z(x)^2 \sqrt{1 - \mathcal{F}v'(x)^2 - 2v'(x)z'(x)}} \right). \quad (9.88)$$

Como vemos  $L_{NG}$  no depende explícitamente de  $x$  y por lo tanto existe una cantidad conservada que se calcula de la siguiente manera

$$E = \sum_i p_i \dot{q}_i - L_{NG} \quad \text{donde} \quad p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L_{NG}, \quad (9.89)$$

en consecuencia, la constante  $E$  vale

$$E = -\frac{1}{z(x)^2 \sqrt{1 - \mathcal{F}v'(x)^2 - 2v'(x)z'(x)}}. \quad (9.90)$$

Como en el caso de las funciones de dos puntos, imponemos las condiciones de contorno

$$z(0) = z_*, \quad v(0) = v_*, \quad v'(0) = 0 \quad z'(0) = 0, \quad (9.91)$$

lo que genera que la constante (9.90) valga

$$E = -\frac{1}{z_*^2}. \quad (9.92)$$

Con los resultados conseguidos hasta aquí, las ecuaciones de movimiento que surgen a partir de  $L_{NG}$  toman la siguiente forma

$$\frac{\mathcal{F}_v v'(x)^2}{2} + \mathcal{F}_z z'(x) v'(x) + \mathcal{F} v''(x) + z''(x) = 0, \quad (9.93)$$

$$E v''(x) - \frac{2}{E z(x)^5} - \frac{E \mathcal{F}_z v'(x)^2}{2} = 0. \quad (9.94)$$

Por lo tanto, la acción de Nambu-Goto *on-shell* toma la forma

$$A_{NG} = -\frac{R}{2\pi\alpha} \int_{-l/2}^{l/2} dx \frac{1}{E z(x)^4}. \quad (9.95)$$

O haciendo explícito el valor de  $E$ , las ultimas 3 expresiones nos quedan

$$\frac{\mathcal{F}_v v'(x)^2}{2} + \mathcal{F}_z z'(x) v'(x) + \mathcal{F} v''(x) + z''(x) = 0. \quad (9.96)$$

$$-\frac{v''(x)}{z_*^2} + \frac{2z_*^2}{z(x)^5} + \frac{\mathcal{F}_z v'(x)^2}{2z_*^2} = 0. \quad (9.97)$$

$$A_{NG} = \frac{R}{2\pi\alpha} \int_{-l/2}^{l/2} dx \frac{z_*^2}{z(x)^4}. \quad (9.98)$$

### 9.3. Resultados de los lazos de Wilson

El estudio de la termalización a partir de los lazos de Wilson en los diferentes fondos que se estudiaron en esta tesis fueron publicados en [9], [11], [102], [112], [113] y [114]. De modo complementario y en forma de chequeo, nosotros reproducimos los resultados de estos autores.

Omitiremos las conclusiones, ya que las mismas están en dichos artículos anteriormente citados.

#### 9.3.1. Termalización de lazos de Wilson rectangulares AdS-BH

En la figura 9.4 se muestran las curvas de termalización obtenidas por nosotros que originalmente se encuentran en [9]. Como siempre a lo largo de todos los resultados que obtuvimos en esta tesis, los modos con  $\ell$  más chico termalizan primero.

Para  $\ell$  fijo, y distinta dimensión vemos que el  $t_T$  no cambia, aunque si cambia el valor inicial del WL. Por otro lado, encontramos el mismo resultado reportado por [9], en donde para  $\ell$  grande y  $d = 3$  aparece el *swallow tale* y donde para  $d = 4$  desaparece dicho efecto.

#### 9.3.2. Termalización de lazos de Wilson rectangulares AdS-RN

De la figura 9.5 vemos que el  $t_T$  disminuye si aumentamos la dimensión. Por otro lado, cuando variamos la carga de  $Q = 0 \dots a Q = Q_{ext}$ ,  $t_T$  aumenta. Nuevamente, a mayor  $\ell$ , mayor  $t_T$ .

En lo que refiere al fenómeno de *swallow tale*, a diferencia de la función de dos puntos, se ve que ya aparece para  $\ell$  chico y no para la función de dos puntos<sup>4</sup>. También lo observamos claramente para carga que no son extremales, como es el caso de  $d = 3$ ,  $\ell = 2$  y  $Q = 1$ . Claro esta, que como en el caso de las funciones de dos puntos, cuando  $\ell$  es grande y la carga final del *background* es cercana o exactamente la extremal, el fenómeno de *swallow tale* es más notorio.

---

<sup>4</sup>Esto no lo hice

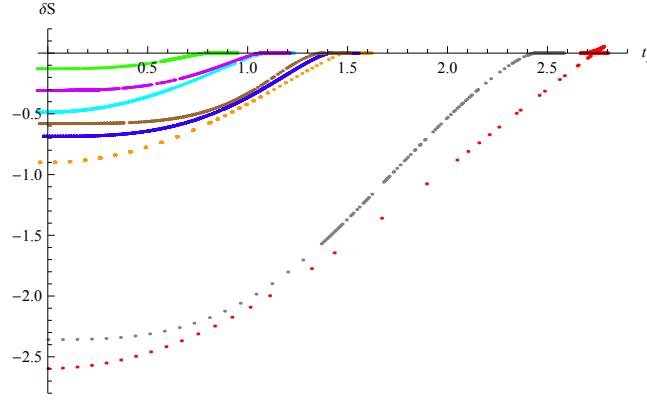


Figura 9.4: Figura correspondiente a lazos de Wilson rectangulares en un fondo AdS-BH con  $M = 1$ .  $\ell = 1$ ,  $d = 3$  en verde.  $\ell = 1.4$ ,  $d = 3$  en Celeste.  $\ell = 1.4$ ,  $d = 4$  en violeta.  $\ell = 2$ ,  $d = 3$  en amarillo.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$  en azul.  $\ell = 2$ ,  $d = 5$  en marrón.  $\ell = 4$ ,  $d = 3$  en rojo ST.  $\ell = 4$ ,  $d = 4$  en gris.

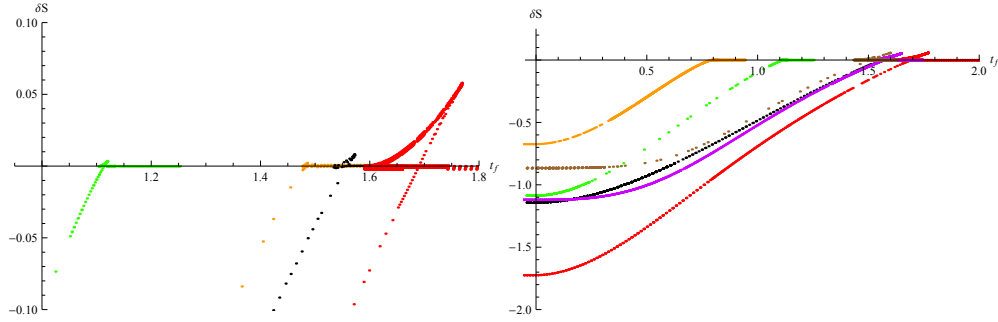


Figura 9.5: Las figuras corresponden a lazos de Wilson rectangulares en un fondo AdS-RNS con  $M = 1$ . La de la izquierda corresponden  $\ell = 1.4$ ,  $Q = Q_{ext}$ ,  $d = 3$  verde.  $\ell = 2$ ,  $d = 3$ ,  $Q = 0$  Amarillo.  $\ell = 2$ ,  $d = 3$ ,  $Q = 1$  negro.  $d = 3$ ,  $Q = Q_{ext}$  rojo. La figura de la derecha corresponde a  $\ell = 1$ ,  $Q = Q_{ext}$ ,  $d = 3$  amarillo.  $\ell = 1.4$ ,  $Q = Q_{ext}$ ,  $d = 3$  verde.  $\ell = 2$ ,  $Q = Q_{ext}$ ,  $d = 3$  rojo.  $\ell = 2$ ,  $Q = Q_{ext}$ ,  $d = 4$  violeta.  $\ell = 2$ ,  $Q = Q_{ext}$ ,  $d = 5$  marrón.  $\ell = 2$ ,  $Q = 1$ ,  $d = 3$  negro.

### 9.3.3. Termalización de lazos de Wilson rectangulares AdS-GB-BH

Como podemos ver en las figura 9.6 y 9.7, el *swallow tale* se incrementa a medida que aumenta  $\alpha$ , pero si aumentamos la dimensión este efecto disminuye.

Como en el caso de las funciones de dos puntos, a mayor  $\alpha$ , menor  $t_T$  y a mayor  $\ell$  con  $d$  y  $\ell$  fijos, mayor  $t_T$ .

### 9.3.4. Termalización de lazos de Wilson rectangulares AdS-GB-RN

De las figuras 9.8 y 9.9 podemos observar que a mayor  $\alpha$  menor  $t_T$  y como en caso de las funciones de dos puntos, al aumentar  $\alpha$  se nota mucho mejor el efecto del swallow tale. En este caso, a mayor dimensión el  $t_T$  es menor, pero el *swallow tale* es más grande a mayor dimensión.

Por otro lado, como fue en todos los casos estudiados en esta tesis, a mayor  $\ell$  mayor  $t_T$ . Al igual que en el fondo AdS-RN, encender potencial químico en el fondo lo que produce es incrementar el  $t_T$ .

Al igual que en el caso de los WLRGB, vemos que no hace falta tener  $\ell$  grandes para observar el *swallow tale*, aunque si tenemos que tener cargas  $Q$  cercanas a la extremal.

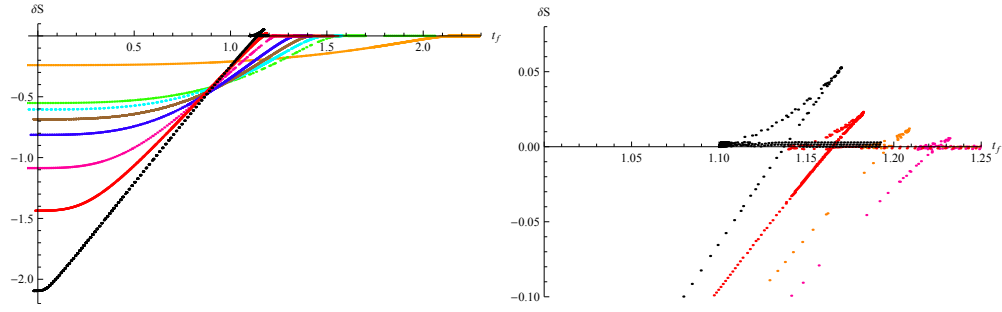


Figura 9.6: Las figuras corresponden a lazos de Wilson rectangulares en *background* de AdS-GB con  $M = 1$ . La de la izquierda corresponde  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = -2$  en amarillo.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = -0.24$  en verde.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = -0.1$  celeste.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = 0$  marrón.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = 0.1$  en azul.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = 0.2$  en violeta.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = 0.24$  en rojo.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = 0.24999$  en negro. La figura de la derecha corresponde a  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = 0.2$  en violeta.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = 0.22$  en naranja.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = 0.24$  en rojo.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = 0.24999$  en negro.

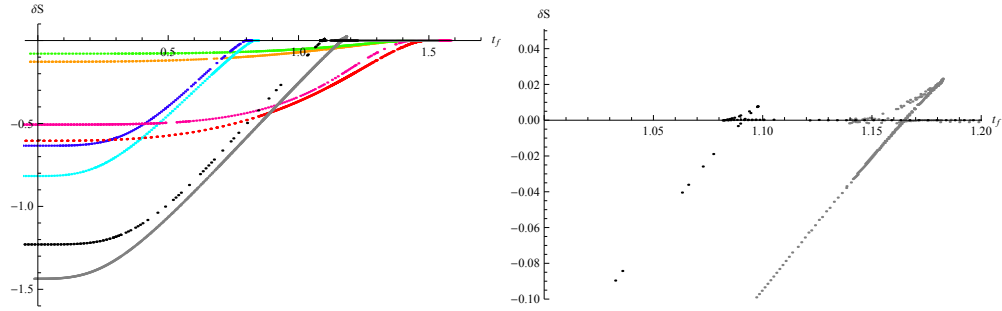


Figura 9.7: Las figuras corresponden a lazos de Wilson rectangulares en *background* de AdS-GB con  $M = 1$ . La de la izquierda corresponde  $\ell = 1.4$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = -1$  en amarillo.  $\ell = 1.4$ ,  $d = 5$ ,  $\alpha = -1$  en verde.  $\ell = 1.4$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = -0.1$  en celeste.  $\ell = 1.4$ ,  $d = 5$ ,  $\alpha = -0.1$  en azul.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = -0.1$  en rojo.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = -0.1$  en violeta.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = 0.24$  en gris.  $\ell = 2$ ,  $d = 5$ ,  $\alpha = 0.24$  en negro. La figura de la derecha corresponde a  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = 0.24$  en gris.  $\ell = 2$ ,  $d = 5$ ,  $\alpha = 0.24$  en negro.

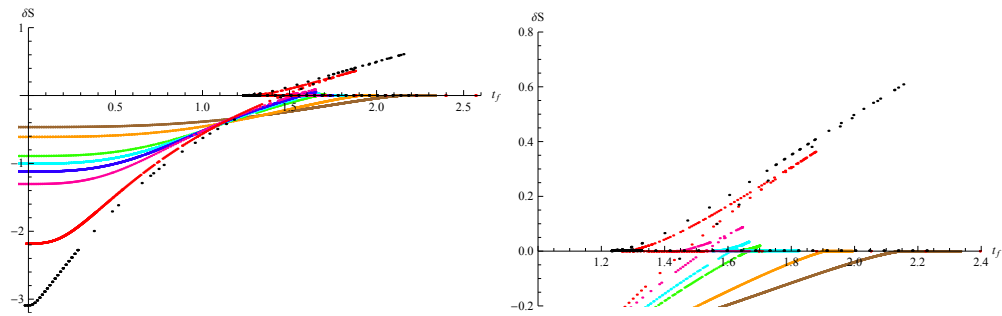


Figura 9.8: Las figuras corresponden a lazos de Wilson rectangulares en un fondo cargandose de AdS-GB-RN con  $M = 1$  y  $Q = Q_{ext}$ . La de la izquierda corresponden  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = -2$  en marrón.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = -1$  en amarillo.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = -0.24$  en verde.  $\ell = 4$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = -0.1$  en celeste.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = 0$  en azul.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = 0.1$  en violeta.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = 0.24$  en rojo.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$ ,  $\alpha = 0.24999$  en negro. La figura de la derecha corresponde a un zoom de la figura de la izquierda.

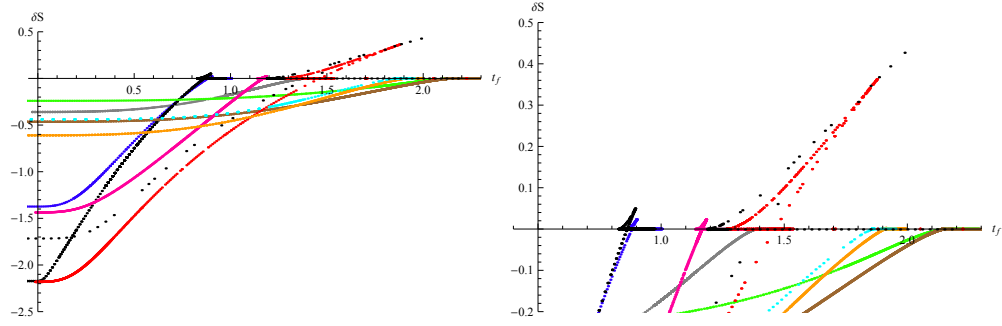


Figura 9.9: Las figuras corresponden a lazos de Wilson rectangulares en un fondo cargandose de AdS-GB-RN con  $M = 1$  y  $Q = 1$ . La de la izquierda corresponde  $\ell = 2$ ,  $d = 4$   $\alpha = -2$   $Q = 0$  en verde.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$   $\alpha = -2$   $Q = Q_{ext}$  marron.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$   $\alpha = 0.24$   $Q = 0$  en violeta.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$   $\alpha = 0.24$   $Q = Q_{ext}$  en rojo.  $\ell = 2$ ,  $d = 4$   $\alpha = -1$   $Q = Q_{ext}$  en amarillo.  $\ell = 2$ ,  $d = 5$   $\alpha = -1$   $Q = Q_{ext}$  en celeste.  $\ell = 2$ ,  $d = 5$   $\alpha = 0.24$   $Q = Q_{ext}$  en negro.  $\ell = 1.4$ ,  $d = 4$   $\alpha = -1$   $Q = Q_{ext}$  en gris.  $\ell = 1.4$ ,  $d = 4$   $\alpha = 0.24$   $Q = Q_{ext}$  en azul.  $\ell = 1.4$ ,  $d = 4$   $\alpha = 0.24999$   $Q = Q_{ext}$  negro, esta curva de color negro corresponde a la que tiene menor  $t_T$ . La figura de la derecha corresponde a un zoom de la figura de la izquierda.



# Bibliografía

- [1] A. Giordano, N. Grandi, G. Silva Holographic thermalization of charged operators. JHEP 1505 (2015) 016 [arXiv:1412.7953 [hep-th]].
- [2] A. Giordano, N. Grandi, G. Silva. Holographic thermalization of charged operators in Gauss-Bonnet gravity. Será prontamente publicado.
- [3] J Rammer, *Quantum field theory of non-equilibrium states*, CUP, 2007; Calzetta and B-L Hu, *Nonequilibrium quantum field theory*, E. CUP, 2008; A. Kamenev, *Field Theory of Non-Equilibrium System*, CUP, 2011.
- [4] J. Berges, *Introduction to nonequilibrium quantum field theory*, AIP Conf. Proc. **739** (2005) 3 [hep-ph/0409233].
- [5] A. Polkovnikov, K. Sengupta, A. Silva, and M. Vengalattore, *Colloquium: Nonequilibrium dynamics of closed interacting quantum systems*, Rev. Mod. Phys. 83, 863 (2011). For quantum quenches see P. Calabrese and J. Cardy, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 1368 01; J. Stat. Mech. (2007) P06008.
- [6] M. Moeckel and S. Kehrein, *Interaction Quench in the Hubbard Model*, Phys. Rev. Lett. 100, 175702 (2008); A. Mitra and T. Giamarchi, *Mode-Coupling-Induced Dissipative and Thermal Effects at Long Times after a Quantum Quench*, Phys. Rev. Lett. 107, 150602 (2011).
- [7] M. A. Cazalilla, *Effect of Suddenly Turning on Interactions in the Luttinger Model*, Phys. Rev. Lett. 97, 156403; E. Barouch, B. M. McCoy, and M. Dresdenm, *Statistical Mechanics of the XY Model. I*, Phys. Rev. A 2, 1075 (1970); P. Calabrese and J. Cardy, *Time Dependence of Correlation Functions Following a Quantum Quench*, Phys. Rev. Lett. 96, 136801 (2006); J. Mossel, J-S. Caux, *Exact time evolution of space- and time-dependent correlation functions after an interaction quench in the 1D Bose gas*, New J. Phys. 14, 075006 (2012). M. Rigol, V. Dunjko, V. Yurovsky and M. Olshanii, Phys. Rev. Lett. 98 (2007) 50405. For experimental observations, see T. Kinoshita, T. Wenger and D.S. Weiss, Nature 440 (2006) 900.
- [8] J. Berges and I.-O. Stamatescu, *Simulating nonequilibrium quantum fields with stochastic quantization techniques*, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 202003 [hep-lat/0508030],
- [9] V. Balasubramanian, A. Bernamonti, J. de Boer, N. Copland, B. Craps, E. Keski-Vakkuri, B. Muller and A. Schafer *et al.*, *Thermalization of Strongly Coupled Field Theories*,” Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 191601 [arXiv:1012.4753]; V. Balasubramanian, A. Bernamonti, J. de Boer, N. Copland, B. Craps, E. Keski-Vakkuri, B. Muller and A. Schafer *et al.*, Phys. Rev. D **84** (2011) 026010 [arXiv:1103.2683].
- [10] D. Galante. Tesis: Aplicaciones de la dualidad AdS/CFT a plasmas de teorías de Yang-Mills. Tesis.
- [11] D. Galante and M. Schvellinger, *Thermalization with a chemical potential from AdS spaces*, JHEP **1207** (2012) 096 [arXiv:1205.1548].
- [12] E. Caceres and A. Kundu, *Holographic Thermalization with Chemical Potential*, JHEP **1209** (2012) 055 [arXiv:1205.2354]; E. Caceres, A. Kundu and D.-L. Yang, *Jet Quenching and Holographic Thermalization with a Chemical Potential*, JHEP **1403** (2014) 073 [arXiv:1212.5728].

- [13] V. E. Hubeny and M. Rangamani, *A Holographic view on physics out of equilibrium*, Adv. High Energy Phys. **2010** (2010) 297916 [arXiv:1006.3675].
- [14] Jorge Casalderrey-Solana, Hong Liu, David Mateos, Krishna Rajagopal, and Urs Achim Wiedemann, *Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions*, [arXiv:1101.0618].
- [15] P. C. Vaidya, *The external field of a radiating star in general relativity*, Curr. Sci. 12 (1943) 183; P. C. Vaidya, Proc. Indian. Acad. Sci. A. 33 (1951) 264
- [16] E. Caceres, A. Kundu, J. F. Pedraza and W. Tangarife, *Strong Subadditivity, Null Energy Condition and Charged Black Holes*, JHEP **1401** (2014) 084 [arXiv:1304.3398].
- [17] D. Garfinkle, L. A. Pando Zayas and D. Reichmann, *on Field Theory Thermalization from Gravitational Collapse*, JHEP **1202** (2012) 119 [arXiv:1110.5823].
- [18] A. Allais and E. Tonni, *holographic evolution of the mutual information*, JHEP **1201** (2012) 102 [arXiv:1110.1607].
- [19] S. R. Das, *Holographic Quantum Quench*, J. Phys. Conf. Ser. **343** (2012) 012027 [arXiv:1111.7275].
- [20] D. Steineder, S. A. Stricker and A. Vuorinen, *Probing the pattern of holographic thermalization with photons*, JHEP **1307** (2013) 014 [arXiv:1304.3404].
- [21] B. Wu, *On holographic thermalization and gravitational collapse of massless scalar fields*, JHEP **1210** (2012) 133 [arXiv:1208.1393].
- [22] X. Gao, A. M. Garcia-Garcia, H. B. Zeng and H. Q. Zhang, *Normal modes and time evolution of a holographic superconductor after a quantum quench*, JHEP **1406** (2014) 019 [arXiv:1212.1049].
- [23] G. Camilo, B. Cuadros-Melgar and E. Abdalla, *Holographic thermalization with a chemical potential from Born-Infeld electrodynamics*, [arXiv:1412.3878].
- [24] M. Alishahiha, M. R. M. Mozaffar and M. R. Tanhayi, *Evolution of Holographic n-partite Information*, [arXiv:1406.7677].
- [25] M. Alishahiha, A. F. Astaneh and M. R. M. Mozaffar, *Thermalization in backgrounds with hyperscaling violating factor*, Phys. Rev. D **90**, no. 4, 046004 (2014) [arXiv:1401.2807].
- [26] V. Keranen, E. Keski-Vakkuri and L. Thorlacius, *Thermalization and entanglement following a non-relativistic holographic quench*, Phys. Rev. D **85**, 026005 (2012) [arXiv:1110.5035].
- [27] A. Buchel, L. Lehner, R. C. Myers and A. van Niekerk, *Quantum quenches of holographic plasmas*, JHEP **1305** (2013) 067 [arXiv:1302.2924].
- [28] V. Keranen, E. Keski-Vakkuri and L. Thorlacius, *Thermalization and entanglement following a non-relativistic holographic quench*, Phys. Rev. D **85** (2012) 026005 [arXiv:1110.5035].
- [29] J. Abajo-Arrastia, J. Aparicio and E. Lopez, *Holographic Evolution of Entanglement Entropy*, JHEP **1011** (2010) 149 [arXiv:1006.4090].
- [30] W. Fischler, S. Kundu and J. F. Pedraza, *Entanglement and out-of-equilibrium dynamics in holographic models of de Sitter QFTs*, JHEP **1407** (2014) 021 [arXiv:1311.5519].
- [31] T. Albash and C. V. Johnson, *Evolution of Holographic Entanglement Entropy after Thermal and Electromagnetic Quenches*, New J. Phys. **13** (2011) 045017 [arXiv:1008.3027].
- [32] P. Fonda, L. Franti, V. Keranen, E. Keski-Vakkuri, L. Thorlacius and E. Tonni, *Holographic thermalization with Lifshitz scaling and hyperscaling violation*, JHEP **1408** (2014) 051 [arXiv:1401.6088].
- [33] X. X. Zeng, D. Y. Chen and L. F. Li, *Holographic thermalization and gravitational collapse in the spacetime dominated by quintessence dark energy*, [arXiv:1408.6632].



- [34] A. Buchel, R. C. Myers and A. van Niekerk, *Nonlocal probes of thermalization in holographic quenches with spectral methods*, [arXiv:1410.6201].
- [35] W. Fischler and S. Kundu, *Strongly Coupled Gauge Theories: High and Low Temperature Behavior of Non-local Observables*, JHEP **1305** (2013) 098, [arXiv:1212.2643].
- [36] V. Balasubramanian, A. Bernamonti, B. Craps, V. Keranen, E. Keski-Vakkuri, B. Muller, L. Thorlacius and J. Vanhoof, *Thermalization of the spectral function in strongly coupled two dimensional conformal field theories*, JHEP **1304** (2013) 069 [arXiv:1212.6066].
- [37] W. Baron, D. Galante and M. Schvellinger, *Dynamics of holographic thermalization*, JHEP **1303** (2013) 070 [arXiv:1212.5234]; W. H. Baron and M. Schvellinger, *Quantum corrections to dynamical holographic thermalization: entanglement entropy and other non-local observables*, JHEP **1308** (2013) 035 [arXiv:1305.2237].
- [38] Y. Z. Li, S. F. Wu and G. H. Yang, *Gauss-Bonnet correction to Holographic thermalization: two-point functions, circular Wilson loops and entanglement entropy*, Phys. Rev. D **88** (2013) 086006 [arXiv:1309.3764].
- [39] X. Zeng and W. Liu, *Holographic thermalization in Gauss-Bonnet gravity*, Physics Letters B **726** (2013) 481 [arXiv:1305.4841].
- [40] E. Caceres, A. Kundu, J. F. Pedraza and D. L. Yang, *Weak Field Collapse in AdS: Introducing a Charge Density*, [arXiv:1411.1744].
- [41] Glendenning, N. Compact stars: Nuclear physics, particle physics, and general relativity. 1997.
- [42] Shapiro, S, Teukolsky, S. Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects. 1983.
- [43] Shifman, M. At the Frontier of Particle Physics: Handbook of QCD, vol. 4. World Scientific, 2002.
- [44] Alford, M. Color superconducting quark matter. arXiv preprint hep-ph/0102047, 2001.
- [45] Rischke, D. H. The quark-gluon plasma in equilibrium. Progress in Particle and Nuclear Physics, vol. 52(1), páginas 197-296, 2004.
- [46] <https://home.cern/topics/large-hadron-collider>
- [47] <https://www.bnl.gov/rhic/>
- [48] Tesis de Michael Harder. Holography and Causality in Einstein-Gauss-Bonnet Gravity.
- [49] JM Maldacena, *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv.Theor.Math.Phys. 2 (1998) 231, [arXiv: 9711200].
- [50] E. Witten, *Anti-de Sitter space and holography*, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 253 (1998) [arXiv: 9802150].
- [51] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, *Gauge theory correlators from non-critical string theory*, Phys. Lett. B 428, 105 (1998) [arXiv: 9802109].
- [52] CV Johnson, D-branes, Cambridge, USA: Univ. Pr. (2003).
- [53] M. B. Green, J. H. Schwarz y E. Witten, Superstring theory. Vol. 1 y 2: Introduction Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 469p. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)
- [54] J. Polchinski, String theory. Vol. 1 y 2: An introduction to the bosonic string" (Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 402p).
- [55] O Aharony, SS Gubser, JM Maldacena, H Ooguri and Y Oz, *Large N field theories, string theory and gravity*, Phys. Rept. 323, 183 (2000), [arXiv: 9905111].

- [56] E. D'Hoker and D. Z. Freedman, *Supersymmetric gauge theories and the AdS/CFT correspondence*, [arXiv: 0201253].
- [57] J. M. Maldacena, Lectures on AdS/CFT, [arXiv: 0309246].
- [58] J. Polchinski, *Introduction to Gauge/Gravity Duality*, [arXiv:1010.6134].
- [59] Makoto Natsuume *AdS/CFT Duality User Guide*. [arXiv:1409.3575v4] 31 Aug 2016
- [60] J. Zaanen, Y.W. Sun, Y. Liu and K. Schalm. *The AdS/CMT manual for plumbers and electricians*.
- [61] J. Zaanen, Y.W. Sun, Y. Liu and K. Schalm. *HOLOGRAPHIC DUALITY IN CONDENSED MATTER PHYSICS*.
- [62] Jorge Casalderrey-Solana, Hong Liu, David Mateos, Krishna Rajagopa and Urs Achim Wiedemann. *Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions*.
- [63] Alfonso V. Ramallo. *Introduction to the AdS/CFT correspondence*. Springer Proc.Phys. 161 (2015) 411-474 [arXiv:1310.4319v3].
- [64] C. R. Stephens, G. 't Hooft, and B. F. Whiting, *Black hole evaporation without information loss*, Class. Quant. Grav. 11 (1994) 621-648, [gr-qc/9310006].
- [65] L. Susskind, *Strings, black holes and Lorentz contraction*, Phys. Rev. D49 (1994) 6606-6611, [arXiv: 9308139].
- [66] L. Susskind, *The World as a hologram*, J. Math. Phys. 36 (1995) 6377-6396, [arXiv: 9409089].
- [67] L. Susskind and E. Witten, *The Holographic bound in anti-de Sitter space*, [arXiv:9805114].
- [68] B. Swingle, *Entanglement Renormalization and Holography*, [arXiv:0905.1317] [condmat.str-el].
- [69] A Planar Diagram Theory for Strong Interactions, G 't Hooft, Nucl.Phys. B72 (1974) 461.
- [70] J. D. Brown and M. Henneaux, *Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity*. Commun.Math.Phys. 104(1986) 207-226.
- [71] J. Polchinski, *Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges*. Phys.Rev.Lett. 75 (1995) 4724-4727.[arXiv:9510017].
- [72] Gerard 't Hooft. *Dimensional reduction in quantum gravity*. In Salamfest 1993:0284-296. arXiv:gr-qc/9310026
- [73] Leonard Susskind. *The World as a hologram*.J.Math.Phys. 36 (1995) 6377-6396.[arXiv:9409089]
- [74] Igor R. Klebanov. *World Volume Approach to Absorption by Non-dilatonic Branes*. Nucl.Phys. B496 (1997) 231-242. [arXiv: 9702076]
- [75] S.S. Gubser, I.R. Klebanov, A.A. Tseytlin. *String Theory and Classical Absorption by Threebranes*. Nucl.Phys.B499:217-240,1997. [arXiv:9703040].
- [76] S.S. Gubser, I.R. Klebanov. *Absorption by Branes and Schwinger Terms in the World Volume Theory*. Phys.Lett.B413:41-48,1997. [arXiv:9708005].
- [77] Alexander M. Polyakov. *String theory and quark confinement*. Nucl.Phys.Proc.Suppl. 68 (1998) 1-8. [arXiv:9711002].
- [78] M. Henningson and K. Skenderis, *The Holographic Weyl anomaly*, M. Henningson and K. Skenderis, JHEP 9807 (1998) 023 [arxiv:9806087].
- [79] S. de Haro, S. N. Solodukhin and K. Skenderis, *Holographic reconstruction of spacetime and renormalization in the AdS / CFT correspondence*, Commun. Math. Phys. 217 (2001) 595 [arXiv:0002230].

- [80] K. Skenderis. *Lecture notes on holographic renormalization*, Class. Quant. Grav. **19** (2002) 5849 [arXiv:0209067].
- [81] S. A. Hartnoll, *Lectures on holographic methods for condensed matter physics*, Class. Quant. Grav. **26** (2009) 224002 [arXiv:0903.3246]; S. A. Hartnoll,
- [82] J. M. Maldacena, *Wilson loops in large  $N$  field theories*, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 4859, [arXiv:9803002].
- [83] S. J. Rey and J. T. Yee, *Macroscopic strings as heavy quarks in large  $N$  gauge theory and anti-de Sitter supergravity*, Eur. Phys. J. C **22** (2001) 379, [arXiv:9803001].
- [84] Wolfgang Mueck, K.S. Viswanathan, *Conformal field theory correlators from classical scalar field theory on  $AdS_{(d+1)}$* , Phys.Rev. D**58** (1998) 041901, [arXiv:9804035].
- [85] Harold Erbin, *Scalar propagators on  $adS$  space*.
- [86] Vijay Balasubramanian, Per Kraus, and Albion Lawrence. *Bulk vs. Boundary Dynamics in Anti-de Sitter Spacetime* (May 1998). doi: 10.1103/PhysRevD.59.046003. [arXiv:9805171]. Vijay Balasubramanian et al. *Holographic Probes of Anti-de Sitter Spacetimes* (Aug. 1998). doi: 10.1103/PhysRevD.59.104021. [arXiv:9808017].
- [87] D. T. Son and A. O. Starinets, *Minkowski space correlators in  $AdS/CFT$  correspondence: Recipe and applications*, JHEP **0209**, 042 (2002) [arXiv:0205051].
- [88] C. P. Herzog and D. T. Son, *Schwinger-Keldysh propagators from  $AdS/CFT$  correspondence*, JHEP **0303**, 046 (2003) [arXiv:0212072].
- [89] Tom Banks, Michael R. Douglas, Gary T. Horowitz, Emil Martinec,  *$AdS$  Dynamics from Conformal Field Theory*, [arxiv:9808016].
- [90] V. Balasubramanian and S. F. Ross, *Holographic particle detection*, Phys. Rev. D **61** (2000) 044007 [arXiv:9906226].
- [91] J. Louko, D. Marolf and S. F. Ross, *On geodesic propagators and black hole holography*, Phys. Rev. D **62** (2000) 044041 [arXiv:0002111].
- [92] R. P. Feynman, *Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction*, Phys. Rev. **80** (1950) 440;
- [93] Julian Schwinger, *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*, Phys. Rev. **82** (1951) 664;
- [94] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, Wiley, New York, 1981;
- [95] E. Kiritsis, *Introduction to superstring theory*, Leuven notes in mathematical and theoretical physics [arXiv:9709062];
- [96] Thomas Faulkner, Hong Liu, John McGreevy and David Vegh, *Emergent quantum criticality, Fermi surfaces, and  $AdS_2$* . Phys. Rev. D **83**, 125002 [arXiv:0907.2694v1]
- [97] G. Festuccia, H. Liu, *Excursions beyond the horizon: Black hole singularities in Yang-Mills theories (I)*, JHEP **04** (2006) 044 [arXiv:0506202].
- [98] S. A. Hartnoll, D. M. Hofman and D. Vegh, *Stellar spectroscopy: Fermions and holographic Lifshitz criticality*, JHEP **1108** (2011) 096 [arXiv:1105.3197].
- [99] S. Lin and E. Shuryak, *Toward the  $AdS/CFT$  Gravity Dual for High Energy Collisions. 3. Gravitationally Collapsing Shell and Quasiequilibrium*, Phys. Rev. D **78** (2008) 125018, [arXiv:0808.0910].
- [100] S. Bhattacharyya and S. Minwalla, *Weak Field Black Hole Formation in Asymptotically  $AdS$  Spacetimes*, JHEP **0909** (2009) 034, [arXiv:0904.0464].

- [101] Elena Caceres and Arnab Kundu, *Holographic Thermalization with Chemical Potential*, JHEP 1209(2012) 055 [arXiv:1205.2354v2].
- [102] Xiao-Xiong Zeng, Xian-Ming Liu, Wen-Biao Liu. *Holographic thermalization with a chemical potential in Gauss-Bonnet gravity*. JHEP03(2014)031. [arXiv:1311.0718].
- [103] Misner, Thorne, Wheeler. *Gravitation*.
- [104] V. Balasubramanian; b, A. Bernamontic, J. de Boerd, B. Crapse, L. Frantif; F. Gallie, E. Keski-Vakkurif; h, B. Mulleri, A. Schaferj. *Inhomogeneous holographic thermalization*. JHEP 1310 (2013) 082. [arXiv:1307.7086].
- [105] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [106] J. Aparicio and E. Lopez, *Evolution of Two-Point Functions from Holography*, JHEP **12** (2011) 082 [arXiv:1109.3571]
- [107] A. Chamblin, R. Emparan, C. V. Johnson and R. C. Myers, *Charged AdS black holes and catastrophic holography*, Phys. Rev. D 60 (1999) 064018, [arXiv:9902170].
- [108] V. Balasubramanian, A. Bernamonti, J. de Boer, N. Copland, B. Craps, E. Keski-Vakkuri, B. Muller and A. Schafer et al., *Holographic Thermalization*, Phys. Rev. D 84 (2011) 026010, [arXiv:1103.2683].
- [109] J. Abajo-Arastia, J. Aparicio and E. Lopez, *Holographic Evolution of Entanglement Entropy*, JHEP **1011** (2010) 149 [arXiv:1006.4090]
- [110] R. C. Myers, M. F. Paulos and A. Sinha, *Holographic Hydrodynamics with a Chemical Potential*, JHEP 0906 (2009) 006, [arXiv:0903.2834].
- [111] Landau y Lifshitz. *Física teórica*. Volúmen I. Mecánica.
- [112] ZhangWangAbdallaPapantonopoulos *Holographic Thermalization in Gauss-Bonnet Gravity with de Sitter Boundary*. Phys.Rev. D91 (2015) no.10, 106010 [ arXiv:1412.7073].
- [113] Yong-Zhuang Li, Shao-Feng Wu, Guo-Hong Yang. *Gauss-Bonnet correction to Holographic thermalization: two-point functions, circular Wilson loops and entanglement entropy*. Phys. Rev. D 88, 086006 (2013) [arXiv:1309.3764].
- [114] Xiao-Xiong Zeng, Wen-Biao Liu. *Holographic thermalization in Gauss-Bonnet gravity*. Physics Letters B 726 (2013) 481 [arXiv:1305.4841].

46

ACTA 1858

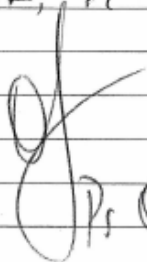
EN EL DÍA DE LA FECHA, EL LIC. GIORDANO OSOR ACEJANDRO, HA REALIZADO LA DEFENSA DE SU TESIS DOCTORAL DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, AREA FÍSICA.

EL TESIS HA APROBADO LA MISHA CON LA CALIFICACIÓN DE SOBRESALIENTE (10) SEGÚN LA EVALUACIÓN DEL JURADO INTEGRADO POR LOS ABAJO FIRMANTES.

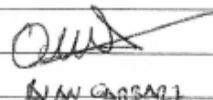
LA DATA, 19 DE JUNIO DE 2018



Dr. Pablo Pisoni



Dr. O.P. Sanjivan



Dr. Juan Carlos

Figura 9.10: